REVISTA

DE LA

UNIVERSIDAD DE GUAYAQUIL

Año V	Guayaquil, Junio 30 de 1934	Núm. 1

Estudio sobre la flexión y el esfuerzo cortante y cálculo de vigas de Hormigón armado afectadas por estos esfuerzos

Trabajo del alumno Sr. Héctor Manrique Acevedo,

premiado en el Concurso promovido entre los alumnos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

PRIMERA PARTE

RESUMEN DE LA TEORIA GENERAL DE LA FLEXION.

Se denomina flexión al efecto que se produce en una pieza o viga cualquiera, cuando bajo la acción de fuerzas de sentido contrario que obran en distintos puntos de ella, se curva en una cierta forma. Cuando la línea de acción de las fuerzas es normal al plano de la pieza en donde inciden, la flexión recibe el nombre de simple; cuando es oblicua, se la denomina compuesta. En el presente estudio consideraremos únicamente la primera.

Supongamos a una pieza o viga apoyada en sus dos extremidades, según se ve en la figura *1*. Si consideramos que se le ha aplicado una fuerza *P* en un punto cualquiera de su luz, actuando hacia abajo, la pieza se curvará y adoptará una forma parecida a la dibujada en línea de puntos.

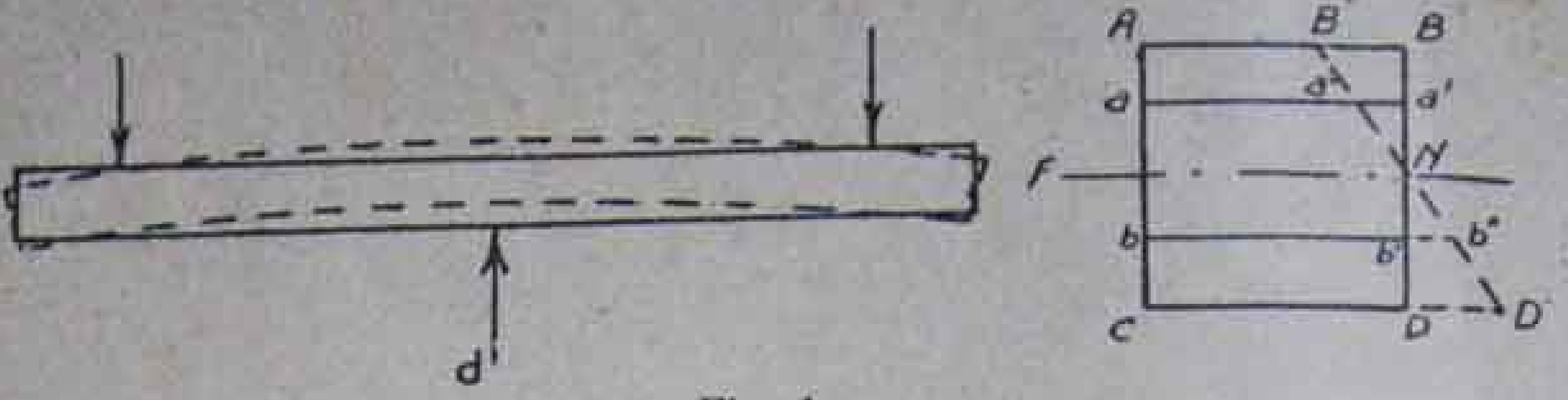


Fig. 1.

Examinando una parte cualquiera de ella, la ABCD por ejemplo, comprendida entre dos planos transversales, perpendiculares a su eje longitudinal: que ha sido representada considerablemente aumentada para mayor claridad en la figura, se verá que la sección BD ha descrito un cierto ángulo sin dejar de ser normal al eje de la viga y que las fibras que constituyen el material de que ella está hecha, como las *a-a'* y *b-b'* han sufrido por consiguiente acortamientos y alargamientos (conservando el paralelismo existente entre ellas) que en la figura están representados por los triángulos semejantes *B'BN* y *D'DN;* por la semejanza de dichos triángulos podemos deducir que, los acortamientos y alargamientos que las fibras de la pieza han sufrido, son directamente proporcionales entre sí y a sus distancias respectivas al eje *FN*. De aquí podemos deducir que las fibras más afectadas son las más alejadas de la fibra central, sufriendo compresiones máximas las superiores y extensiones máximas las inferiores; y, que la fibra situada en el eje *FN* permanece invariable por la misma causa, sin alargarse ni acortarse, razón por la que ha sido denominada *fibra neutra*. La distancia a que esta fibra se encuentra situada de las más afectadas, es en las vigas rectangulares de sección uniforme siempre igual a la mitad de su altura, pues pasa por su centro de gravedad.

RESUMEN DE LA TEORIA GENERAL DEL ESFUERZO CORTANTE.

Se denomina esfuerzo cortante al esfuerzo que se produce en una sección determinada de un cuerpo, por la acción de fuerzas dirigidas en sentidos opuestos, que trata de hacer deslizar las partículas de dicha sección sobre las de la sección adyacente.

Por ejemplo, sea la viga *AB* que se encuentra apoyada por sus extremidades en los puntos *a* y *b*, y que soporta una cierta carga P. Para suponer a esta pieza en equilibrio será necesario que en los puntos de apoyo se desarrollen esfuerzos de sentido contrario al de la fuerza P, a los que se denomina reacciones y cuyo valor total debe ser equivalente al de ella, en magnitud.

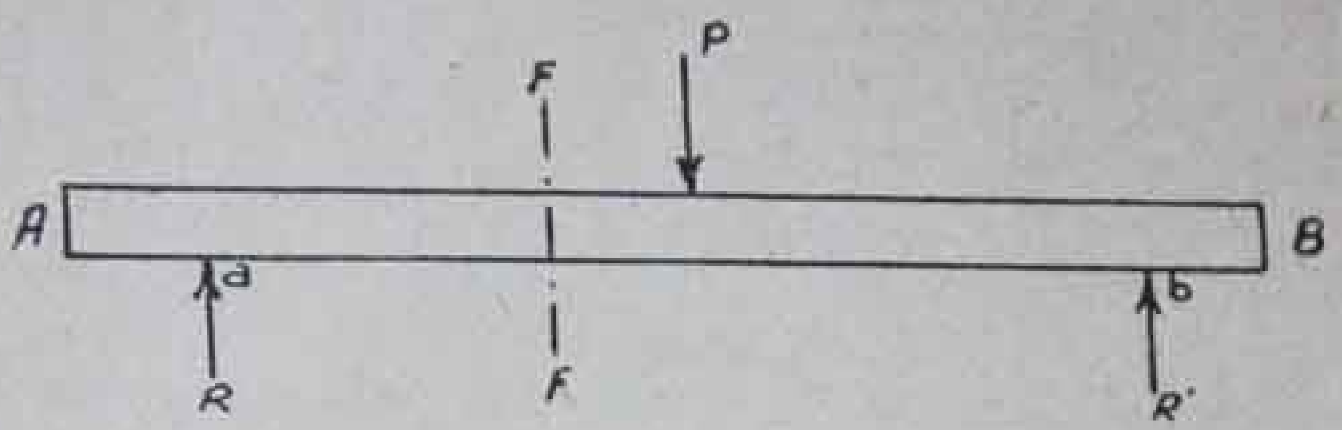


Fig. 2.

Llamemos R a la reacción que se produce en el apoyo a, situado al lado izquierdo de la pieza, que obra hacia arriba, tendiendo a levantar la pieza en esa extremidad; su valor, de acuerdo con lo que antes hemos expuesto, y suponiendo a la carga P, actuando en la mitad de la luz l, será $P|2$. Si por un momento suponemos cortada a la viga en la sección FF, tendremos, que la parte de ella situada hacia la izquierda tratará de moverse hacia arriba por la acción de la fuerza R y la otra parte situada hacia la derecha tratará de hacerlo en sentido contrario por la acción de la resultante de la fuerza P y de la reacción en el apoyo b. A esta acción de las fuerzas al tratar de hacer que las superficies de una sección cualquiera de un cuerpo se deslizen una sobre otra, en sentido contrario, es a lo que, como dijimos antes, se denomina esfuerzo cortante. El esfuerzo cortante puede actuar en cualquier sentido, pero en nuestro estudio, lo consideraremos actuando solamente en sentido vertical.

El esfuerzo cortante actuando verticalmente en una sección cualquiera de una viga, tendrá como valor uno igual a la suma algébrica de una cualquiera de las reacciones más las fuerzas que actúan en la parte de viga comprendida entre el apoyo cuya reacción se ha tomado y la sección que se considera. Por lo tanto en el caso particular que estudiamos su valor sería:

$$E = P|2 = R$$

Por convención se denomina negativo al esfuerzo cortante cuando la resultante de las fuerzas actuantes, actúa hacia abajo y positivo en el caso contrario.

ECUACION GENERAL DE EQUILIBRIO

El enunciado de la ecuación general de equilibrio, dice: "la suma algébrica de todas las fuerzas que actúan sobre una pieza, tiene que ser cero para que ella permanezca en estado de equilibrio; así como también que la suma algébrica de todos los momentos actuantes tendrá que ser cero para que exista dicha condición".

Sea una viga de luz *l* que está apoyada por sus extremos en los puntos *a* y *b*, a la que consideraremos afectada por las siguientes fuerzas: una uniformemente distribuída de valor *P*, otra concentrada, que obra en el mismo sentido de la anterior y cuyo valor es *P'* y finalmente, una tercera fuerza que actúa en sentido opuesto a las anteriores y cuyo valor es *P''*.

Para los efectos del cálculo y la demostración, a la carga uniformemente distribuída *P* se la puede suponer teóricamente actuando con toda su intensidad en el punto medio de la luz.

Haciendo un ligero análisis de las condiciones en que se halla la pieza, como se ve en la fig. 3, se notará que en los puntos de apoyo *a* y *b* tienen que obrar reacciones, de sentido contrario a las fuerzas que actúan sobre la pieza y de un valor total

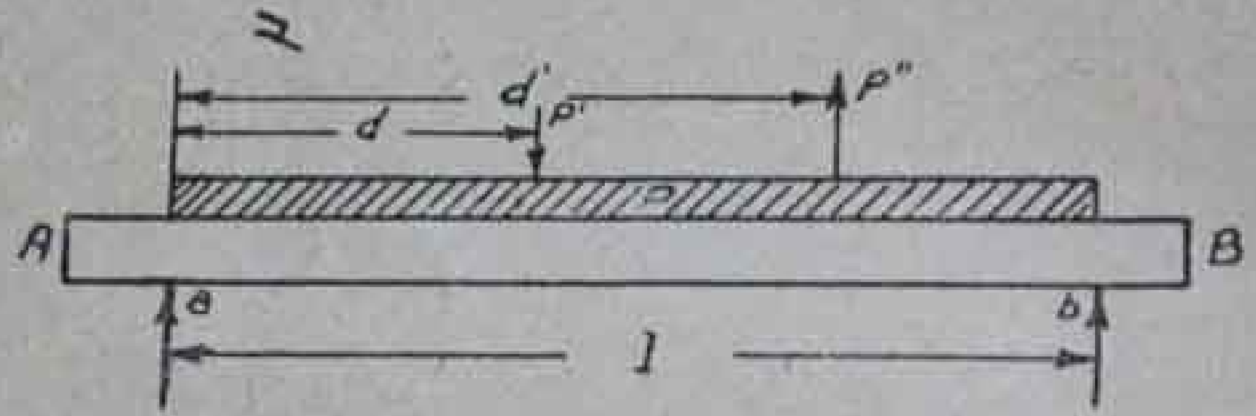


Fig. 3.

tal, que equivalga al de ellas en magnitud para que exista la condición de equilibrio; podremos pues decir que esta condición ha sido obtenida mediante la acción de las fuerzas *P*, *P'*, *P''* y la de las reacciones en *a* y en *b*, a las que llamaremos *R* y *R'*, respectivamente; las fuerzas *P* y *P'* obran en un sentido al que convencionalmente llamaremos negativo y las *P''* *R* y *R'* en sentido opuesto o positivo.

Por lo tanto, efectuando la suma algébrica de todas ellas, tendremos que:

$$R+R'+P''-P-P'=0$$

Y además, si tomamos al punto *a* como centro de momentos, eliminando por consiguiente el momento de la reacción *R* por ser cero el valor de su brazo de palanca, tendremos:

$$-Pl/2-P'd+P'd'+R'l=0$$

De donde llamando $\Sigma(P)$ y $\Sigma(Pd)$ a la suma algébrica de fuerzas y momentos, respectivamente, tendremos finalmente las ecuaciones fundamentales de equilibrio, que dicen:

$$\begin{aligned} R+R'+\Sigma(P)&=0 \\ R'l+\Sigma(Pd)&=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

ESTUDIO DE LA FLEXION EN VIGAS RECTANGULARES DE SECCION UNIFORME Y DETERMINACION DE MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES, EN ELLAS.

PRELIMINAR

Como enunciado general de nuestro estudio diremos que: conocidas las fuerzas exteriores que actúan sobre prismas de sección uniforme, tendiendo a flexarlos, vamos a determinar las tensiones y compresiones máximas que en ellos se desarrollan. Por lo tanto, contando como datos conocidos del problema general que se nos presenta, con la disposición de trabajo de las piezas, las fuerzas externas que obran sobre ellas tendiendo a flexarlas, y finalmente, la forma en que actúan estas fuerzas, vamos a tratar de resolver en cada caso, los puntos siguientes:

1º—Determinar las fuerzas exteriores desconocidas que deben obrar sobre las piezas para que permanezcan en estado de equilibrio; es decir, determinar las reacciones en los apoyos;

2º—Determinar los esfuerzos producidos por las fuerzas externas en la sección que se estudia; o sea, determinar los valores del momento flector y esfuerzo cortante; y,

3º—Determinar en dicha sección las fuerzas moleculares que deben obrar en ella, para equilibrar el sistema citado en el segundo punto; es decir, determinar las condiciones de resistencia de las piezas en la sección considerada.

A continuación analizemos, someramente, las condiciones de trabajo que pueden presentarse en las piezas, es decir, la disposición de sus apoyos y luego las formas en que las fuerzas externas pueden obrar sobre ellas.

Los casos que con referencia a la disposición de los apoyos se ofrecen, son:

1º—Viga simplemente apoyada en ambos extremos;

2º—Viga empotrada por ambos extremos;

3º—Viga apoyada en uno de sus extremos y empotrada en el otro; y.

4º—Viga empotrada solamente por uno de sus extremos, con el otro libre. A esta disposición se la denomina de ménsula o cantilever.

Con respecto a la forma en que actúan las fuerzas o cargas sobre las piezas, solamente se distinguen dos casos:

1º—Cargas o fuerzas concentradas, o sean las que actúan con toda su intensidad en una sección determinada de las piezas; y.

2º—Cargas o fuerzas distribuídas, que pueden serlo variable o uniformemente y que actúan total o parcialmente sobre la longitud de las piezas.

En el primer caso están comprendidas fuerzas como las producidas por unas piezas que actúan directamente sobre otras, como en el caso de una viga que se apoya sobre otra o de una columna sobre una viga.

Al segundo caso pertenecen fuerzas como las producidas por el peso propio de la viga en cuestión, el peso del muro o pared que actúa sobre ella, el peso de la parte de piso o techo que sobre ella obra, aumentado de la parte de carga que corresponde a su superficie, que ha sido calculada como máxima para la estructura y que puede ser producida por el viento, nieve, etc., en el caso de los techos, o por objetos, personas, etc. en el caso de los pisos.

Vamos a entrar ahora al estudio de los casos de vigas que más comúnmente pueden presentarse, tanto con respecto a la disposición de los apoyos cómo por la forma en que actúan sobre ellas las fuerzas. En todos ellos estudiaremos separadamente la reacción en los apoyos, y momentos flectores y esfuerzos cortantes, ya que la determinación de los esfuerzos moleculares que obran en las piezas, en las determinadas secciones que se estudian es común y aplicable a todos los casos, habiéndola dejado por lo tanto para el final.

VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS QUE SOPORTA UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA LONGITUD DE SU LUZ.—Sea la viga AB apoyada por sus extremos en los puntos a y b que soporta una carga de valor P distribuída uniformemente en toda la longitud de su luz l. (fig. 4)

La carga distribuída por unidad de longitud, a la que llamaremos p, será: $P|l$.

1º—*Determinación de las reacciones en los apoyos.*—Para poder determinar el valor de estas reacciones en los puntos a y b, a las que llamaremos R y R' respectivamente, tendremos que partir de la ecuación general de equilibrio (1) ya estudiada, que dice:

$$Rl + \Sigma (Pd) = 0$$

Si al aplicar esta ecuación tomamos el punto a como centro de momentos, habremos eliminado una de las incógnitas o sea la reacción que obra en él y solamente tendremos como sistema de fuerzas actuante sobre la pieza al formado por la carga P,

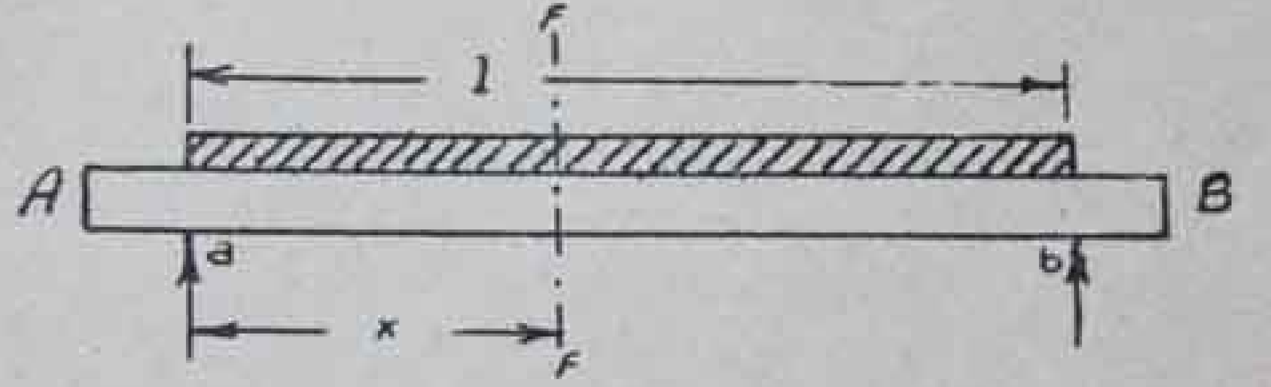


Fig. 4.

a la que consideraremos teóricamente aplicada con toda su intensidad en la mitad de la luz y cuyo momento por lo tanto tiene un valor $P\ l|2$, y la reacción en el otro apoyo actuando con un brazo de palanca igual a la distancia entre ambos apoyos o sea l; por consiguiente, tendremos que:

$$R'l - Pl|2 = 0$$

Y trasponiendo términos:

$$R' = P|2$$

Si tomamos como centro de momentos en lugar del apoyo a, el b i empleamos el mismo método obtendremos el mismo valor $P|2$ para la reacción que actúa en a. Resumiendo pues podremos decir que: las reacciones que se efectúan en los apoyos son iguales y de un valor equivalente a la mitad de la fuerza P.

2º—*Determinación del momento flector y del esfuerzo cortante en una sección cualquiera de la viga.*

Sea FF la sección que vamos a estudiar que se encuentra, situada a una distancia x del apoyo a. (La letra x representará en todos los casos que estudiemos la distancia entre la sección en estudio y el apoyo de la izquierda.)

Para nuestro estudio supondremos a la pieza cortada en dicha sección FF y tendremos que, en la parte de ella situada hacia el apoyo a, actúan las fuerzas externas siguientes: la $P|2$ que representa el valor de la reacción R que obra hacia arriba con un brazo de palanca igual a la distancial x, y, la carga uniformemente repartida que corresponde a la porción de viga que estamos considerando, cuyo valor será px, que obra en un sentido opuesto a la anterior y a la que consideraremos aplicada en la mitad de la distancia x. Analizando los esfuerzos que obran en dicha porción veremos que en la sección FF tienen que actuar dos fuerzas equivalentes a las dos externas $P|2$ y px, pero de sentido contrario (pares de traslación); por lo tanto, tendremos en realidad actuando dos pares de fuerzas, en sentido positivo el primero y negativo el segundo, cuyos momentos serán: $Px|2$ y $px.\ x|2$ respectivamente; sumando algébricamente los valores de estos momentos, obtendremos el de su resultante, que tiende a hacerla girar en un cierto sentido, que estará determinado por el del momento de mayor valor.

Si aplicamos la teoría de los pares que dice: "un par de fuerzas puede ser reemplazado por otro que actúe en el mismo plano, siempre que no se altere su momento o sea el producto de una de las fuerzas por el brazo de palanca" podremos suponer al par resultante actuando horizontalmente, efecto que es el producido por la flexión según vimos en el resumen que de la teoría general de ella dimos al principio.

Por lo tanto sumando algébricamente los valores de los momentos de los pares actuantes, que acabamos de determinar, obtendremos el del momento del par resultante o momento flector y llamándolo M, tendremos que:

$$M = Px|2 - px\ .\ x|2 = pl|2\ .\ x - px\ .\ x|2 \qquad (3)$$

Ecuación que a distancias iguales de los apoyos nos dará valores equivalentes para el momento flector M, por ser la ecuación de una parábola cuyo eje pasa por la mitad de la viga.

El valor del esfuerzo cortante vertical en la sección FF, de acuerdo con la teoría general de él que dimos al principio será igual a la suma algébrica de las fuerzas que obran en la porción de viga que consideramos i en el estudio del momento flector en esta misma sección FF vimos que en ella tenían que actuar dos fuerzas iguales y contrarias a las $P|2$ y px, respectivamente, que obran en sentidos distintos: por lo tanto sumándolas algébricamente obtendremos el valor de la fuerza resultante y su sentido estará dado por la fuerza mayor: llamando E al esfuerzo cortante vertical, tendremos:

$$E = P|2 - px = pl|2 - px \qquad (4)$$

Si damos a x en la ecuación (3) valores crecientes de cero a l, tendremos que:

Cuando $x=0$ . . . . $M=0$
,, $x=l|2$. . . . . $M=pl^2|8$
,, $x=l$ . . . . $M=0$

Lo que nos dice que el momento flector será nulo en los apoyos y máximo en el punto medio de la luz, de un valor:

$$M_m = pl^2|8 = Pl|8 \qquad (5)$$

Efectuando lo mismo con x en la ecuación (4), tendremos:

Cuando $x=0$. . . . . $E=pl|2$
,, $x=l|2$. . . . . $E=0$
,, $x=l$. . . . . $E=pl|2$

Lo que significa que los esfuerzos cortantes serán máximos en los apoyos y de un valor cero en el punto medio de la luz.

Trazando los diagramas correspondientes a los momentos flectores (A) y a los esfuerzos cortantes (B), obtendremos los que se ven en la figura 5, que nos dan los valores respectivos en un punto cualquiera de la viga si se emplean escalas apropiadas.

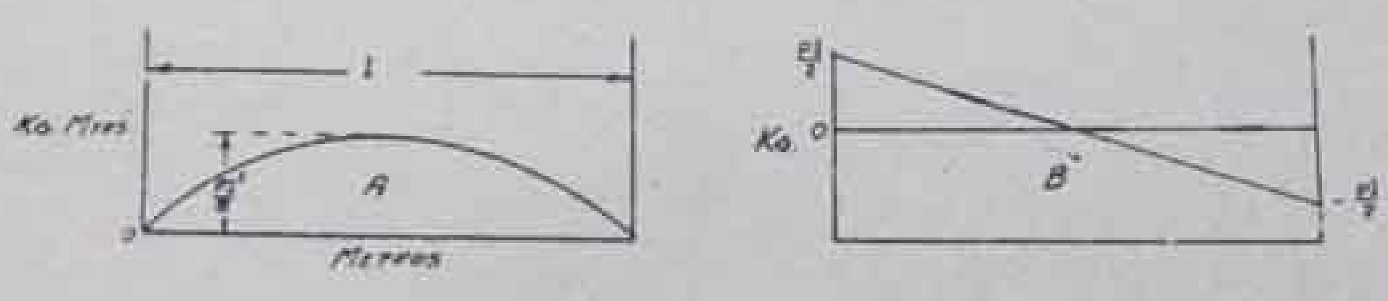


Fig. 5

VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS QUE SOPORTA UNA CARGA CONCENTRADA EN LA MITAD DE SU LUZ.---Sea AB la pieza que vamos a estudiar, de una luz l que se encuentra apoyada en los puntos *a* y *b* y que soporta una carga concentrada P en la mitad de su longitud.

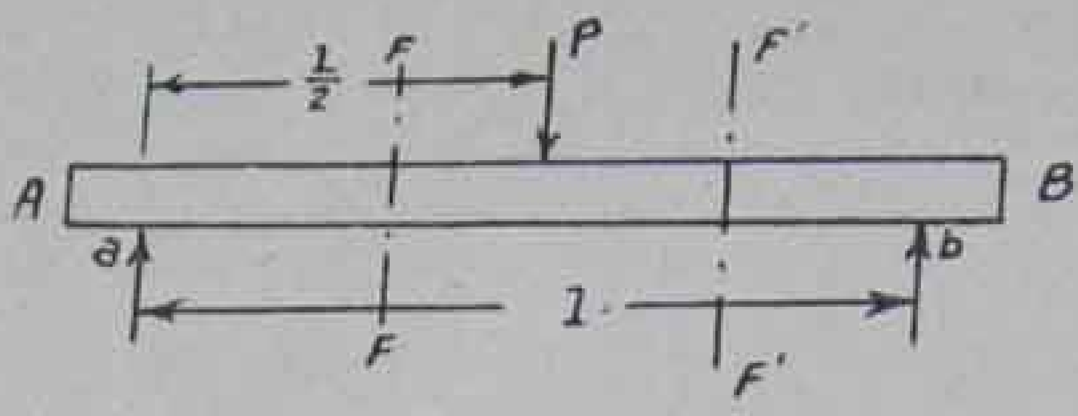


Fig. 6.

1º—*Determinación de las reacciones en los apoyos.*—Partiendo de la ecuación fundamental de equilibrio (1), haciendo al punto *a* centro de momentos y llamando *R* y *R'* a las reacciones en los apoyos *a* y *b*, respectivamente, tendremos:

$$Rl' - Pl|2 = 0$$

De donde trasponiendo y despejando el valor de R', tendremos:

$$R' = P|2 \qquad (6)$$

Efectuando lo mismo con el punto de apoyo *b*, tendremos que el valor de la reacción en *a* estará dado por P|2 igualmente: es decir, que las reacciones en los apoyos son iguales y de un valor equivalente al de la mitad de la carga *P*.

2º—*Determinación del momento flector y del esfuerzo cortante en una sección cualquiera de la viga.*—Sea la sección FF situada del lado izquierdo de *P* y a una distancia del apoyo *a* igual a *x*, la que vamos a estudiar.

Siguiendo el mismo método empleado en el caso anterior, supondremos a la viga cortada en esa sección y procederemos a estudiar los esfuerzos que se realizan en la parte de ella situada cerca del apoyo *a*. En esa porción de viga, como vemos en la figura 6, actúa únicamente la reacción en el apoyo cuyo valor ya determinado es P|2, por consiguiente en la sección FF tendremos que suponer que actúan dos fuerzas de igual valor que ella pero dirigidas en sentido contrario que constituyen el par de traslación, de momento igual a Px|2 que tiende a hacer girar la parte de viga considerada en sentido positivo; el valor del momento de este par representará, según la teoría de ellos, enunciada en el caso anterior, el del momento flector en FF. Por lo tanto:

$$M = Px|2 \qquad (7)$$

El valor del esfuerzo cortante será igual al de la fuerza P|2 que hemos visto que debe obrar en dicha sección FF; de donde, llamando E a dicho esfuerzo, tendremos:

$$E=P|2 \tag{8}$$

Para determinar los valores del momento flector y del esfuerzo cortante en una sección cualquiera de la otra mitad de la viga, por ejemplo la F'F', situada a una distancia x del apoyo a y efectuando un raciocinio semejante al empleado para la sección FF, tendremos que en la sección de viga considerada, obran dos fuerzas, la P|2 y la P, por lo tanto tendremos que suponer actuando en dicha sección F'F' dos equivalentes y dirigidas en sentidos respectivamente opuestos; tendremos así actuando dos pares de fuerzas que obran en sentidos opuestos cuyos momentos serán: $Px|2$ y $P(x-l|2)$; si los sumamos algébricamente obtendremos el valor del momento del par resultante, que representará el del momento flector; luego:

$$M=Px|2-P(x-l|2) \tag{9}$$

El valor del esfuerzo cortante se obtendrá sumando algébricamente las fuerzas que actúan en la sección en estudio y será por consiguiente igual al que obra en el otro lado de la pieza, pero de signo contrario.

Dando a x valores ascendentes de 0 a l, y empleando convenientemente las dos fórmulas halladas para los momentos flectores (que nos deben dar valores iguales a distancias iguales de los apoyos) en cada mitad de la viga, tendremos que:

Cuando x=0. . . . . M=0
,, x=l|2. . . . . M=Pl|4
,, x=l. . . . . M=0

Es decir que el momento flector será de valor cero en los apoyos y máximo en la mitad de la viga, dado por:

$$M=P\,l|4 \tag{10}$$

Procediendo de igual manera con respecto al esfuerzo cortante, tendremos que:

Cuando x=0. . . . . E=P|2
,, x=l|2. . . . . E=cambia de P|2 a -P|2
,, x=l. . . . . E=P|2

Traduciendo gráficamente los valores obtenidos para los momentos flectores y esfuerzos cortantes, obtendremos diagramas semejantes a los que se dan a continuación.

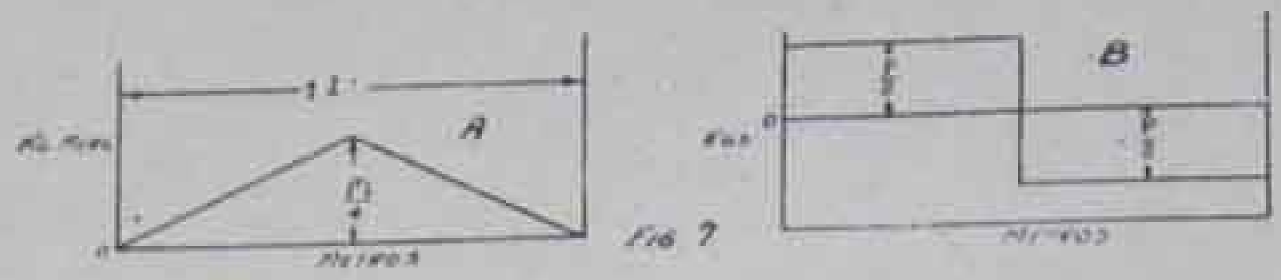


Fig. 7.

Cuando se presente el caso de vigas cargadas uniformemente y con cargas concentradas, para obtener el valor del momento flector en un punto cualquiera de ellas, habrá que obtener separadamente los momentos flectores para cada uno de los casos y luego sumarlos algébricamente.

VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS QUE SOPORTA UNA CARGA CONCENTRADA EN UN PUNTO CUALQUIERA DE SU LUZ.—Sea la viga *AB* de luz *l*, que apoyada en los puntos *a* y *b*, soporta una cierta carga *P* aplicada a una distancia *d* del punto de apoyo *a* y *d'* del *b*.

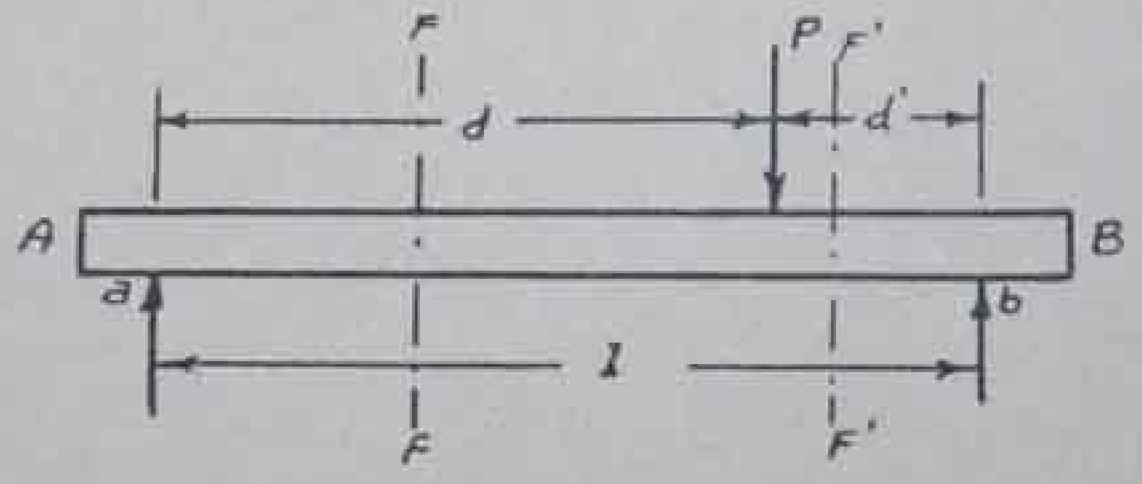


Fig. 8

1º—*Determinación de las reacciones en los apoyos.*—De acuerdo con la ecuación de equilibrio (1), tomando como centro de momentos al punto *a* y llamando *R* y *R'* las reacciones en los apoyos *a* y *b* respectivamente, tendremos:

$$R'\,l + Pd = 0$$

De donde por trasposición y despejando el valor *R'*, obtendremos para éste:

$$R' = Pd|l \qquad (11)$$

Que nos dice que la reacción en el apoyo *b* es igual a la fuerza *P* multiplicada por el cuociente de dividir su distancia al otro apoyo por la longitud total de la viga.

Para el otro apoyo tendremos que, siendo:

$$Rl - Pd' = 0 \quad ; \quad R = Pd'|l$$

2º—*Determinación del momento flector y esfuerzo cortante* *en una sección cualquiera de la viga.*—De acuerdo con el procedimiento general empleado en los casos anteriores, supondremos a la viga cortada en la sección que se desea estudiar, la FF por ejemplo, situada del lado izquierdo de la fuerza P; y tendremos que, hacia ese lado de la sección considerada, actúa únicamente una fuerza, la reacción en el apoyo a, con un brazo de palanca igual a la distancia x; por lo tanto en FF tendrán que actuar dos fuerzas iguales a ella, o sea $Pd'|l$ y de sentido contrario, formándose así un par de fuerzas que obra en sentido positivo y cuyo momento será igual a $Px(d'|l)$, el que según lo que hemos estudiado en casos anteriores podrá ser considerado como el momento flector en dicha sección; es decir que:

$$M=P\ x\ (d'|l)=Rx \tag{12}$$

El valor del esfuerzo cortante estará dado por el de la fuerza $Pd'|l$ que hemos considerado que actúa en FF, por lo tanto:

$$E=Pd'|l=R \tag{13}$$

Tomando otra sección, pero al lado opuesto del punto de aplicación de la fuerza P, la F'F' por ejemplo, situada a una distancia x del apoyo a, veremos que en la parte de viga de longitud x actúan dos fuerzas, la P que obra con un brazo de palanca igual a x-d y la R, o sea la reacción en a que lo hace en sentido opuesto y con un brazo de palanca igual a x; para equilibrar a estas dos fuerzas tendremos que suponer que en F'F' obran dos fuerzas equivalentes y dirigidas en sentidos opuestos, respectivamente, a las dos mencionadas; por lo tanto tendremos actuando en la porción de viga considerada, dos pares de fuerzas de momentos $P\ (x$-$d)$ y $P\ x\ (d'|l)$, que lo hacen en sentido negativo el primero y positivo el segundo; de donde, su resultante que será igual a la suma algébrica de ambos representará el valor del momento flector en esa sección:

$$M=Px(d'|l)-P(x\text{-}d)=Rx-P(x\text{-}d)$$

Y para el esfuerzo cortante que:

$$E=P-Pd'|l=P-R=R',\ \text{según la ecuación} \qquad (1)$$

Si en la igualdad (12) le damos a x valores crecientes de 0 a l, veremos que el momento flector llegará a su valor máximo cuando x sea igual a d; si hacemos lo mismo en la ecuación encontrada para los momentos flectores del otro lado del punto de aplicación de la fuerza P, obtendremos un valor semejante; por lo tanto:

$$M=Pdd'|l \tag{14}$$

Los valores del esfuerzo cortante serán iguales a los encontrados para las dos porciones de viga situadas a ambos lados del punto de aplicación de la fuerza P y en toda la longitud de ellas, variando únicamente sus signos.

Si representamos gráficamente los valores de estos esfuerzos, mediante las fórmulas encontradas y empleando una escala apropiada, obtendremos unos semejantes a los que se dan a continuación.

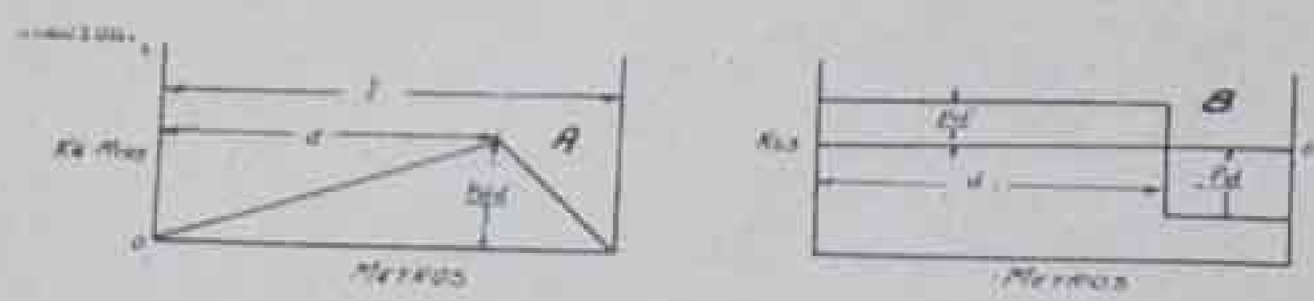


Fig 9.

PIEZA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS QUE SOPORTA DOS CARGAS IGUALES ACTUANDO A DISTANCIAS IGUALES DE LOS APOYOS.—Sea la viga *AB* apoyada en los puntos *a* y *b* que soporta dos cargas de valores iguales *P* y *P'* aplicadas a la distancia *d* de los apoyos *a* y *b*, respectivamente. (Fig. 10).

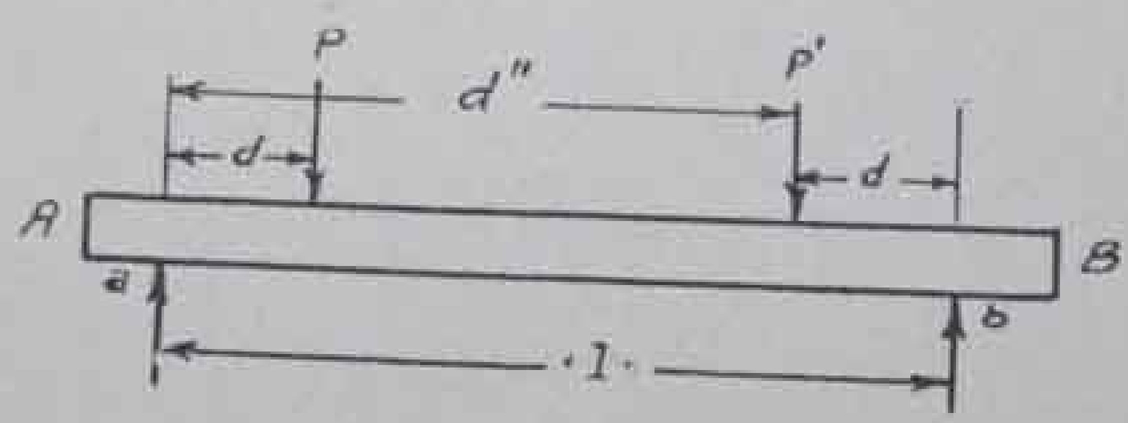


Fig 10.

1º—*Determinación de las reacciones en los apoyos.*—Sean *R* y *R'* las reacciones en los apoyos *a* y *b*, respectivamente; tomando como centro de momentos al punto de apoyo *a* y aplicando la ecuación general de equilibrio (1), tendremos que:

$$R'l-P'(l-d)-Pd=0$$

De donde, despejando el valor de R':

$$R'=\frac{P'(l-d)+Pd}{l}; \text{ y siendo } P=P'; \ R'=P$$

Igual valor se obtendrá para la reacción R, en el otro apoyo; por lo tanto:

$$R=R'=P \qquad (15)$$

2º—*Determinación de los momentos flectores y esfuerzos cortantes.*—Supongamos que la sección que vamos a estudiar está situada entre el punto de aplicación de la fuerza P y el apoyo a, a una distancia de él igual a x. Hacia el lado izquierdo de dicha sección tendremos que solamente actúa una fuerza, la reacción R cuyo valor hemos encontrado ser igual a P; por lo tanto en la sección en estudio tendrán que actuar dos fuerzas iguales y opuestas a ella, formándose así un par de fuerzas que obra en sentido positivo y cuyo momento representa al momento del esfuerzo flector en dicha sección; luego:

$$M = Px \qquad [16]$$

El valor del esfuerzo cortante en la misma sección estará dado por el de la fuerza P que hemos considerado que actúa en ella; de donde tendremos que:

$$E = P \qquad (17)$$

Consideremos ahora otra sección situada entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas y a una distancia x del apoyo a; hacia el lado izquierdo de dicha sección tendremos que actúan dos fuerzas: la P con un brazo de palanca igual a la distancia x-d y la reacción R cuyo brazo de palanca es igual a x; procediendo con un raciocinio semejante al empleado en casos anteriores tendremos que en la porción de viga comprendida entre la sección que se estudia y el apoyo a, actúan dos pares de fuerzas en sentido contrario; por lo tanto si sumamos algébricamente los valores de sus momentos obtendremos el del momento del par resultante, que representa según hemos visto antes el del esfuerzo flector; luego:

$$M = Px - P(x-d) = Pd \qquad (18)$$

Y el valor del esfuerzo cortante estará dado a su vez por la suma algébrica de las fuerzas que actúan en la sección considerada; por consiguiente:

$$E = R - P = P - P = 0 \qquad (19)$$

Y, finalmente para una tercera sección comprendida entre el punto de aplicación de la fuerza P' y el apoyo b y situada a una distancia x del punto a y empleando el método ya conocido, el momento flector estará dado por:

$$M = Px - P(x\text{-}d) - P(x-d'') = P(d''+d-x) = P(l-x) \qquad (20)$$

El valor del esfuerzo cortante será:

$$E = R - P - P' = P - P - P = -P \qquad (21)$$

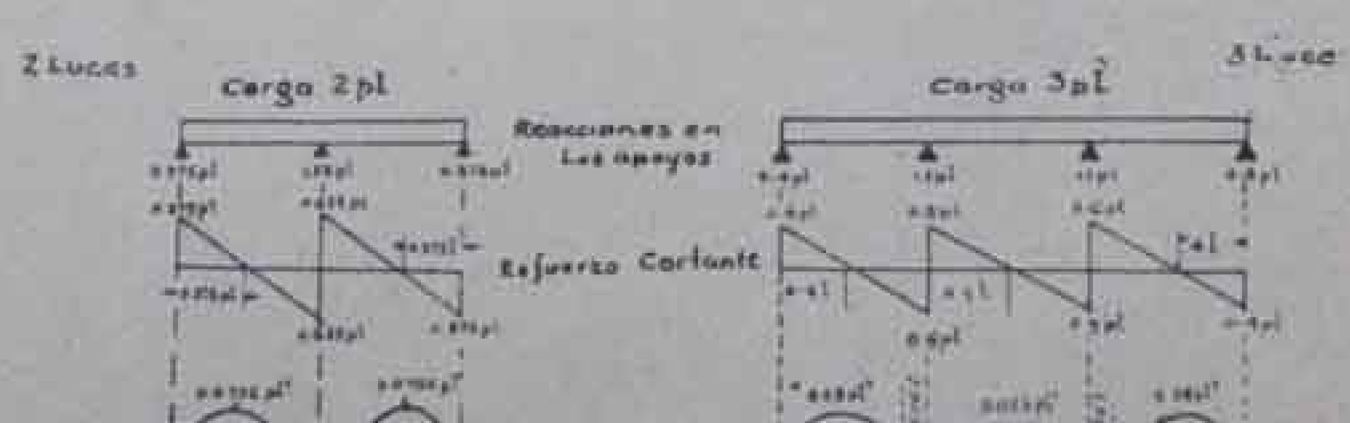
Si empleamos las fórmulas obtenidas para los momentos flectores en cada una de las tres porciones de viga consideradas y damos a x valores crecientes de cero a l, tendremos como valor del momento flector máximo, cuando x=d:

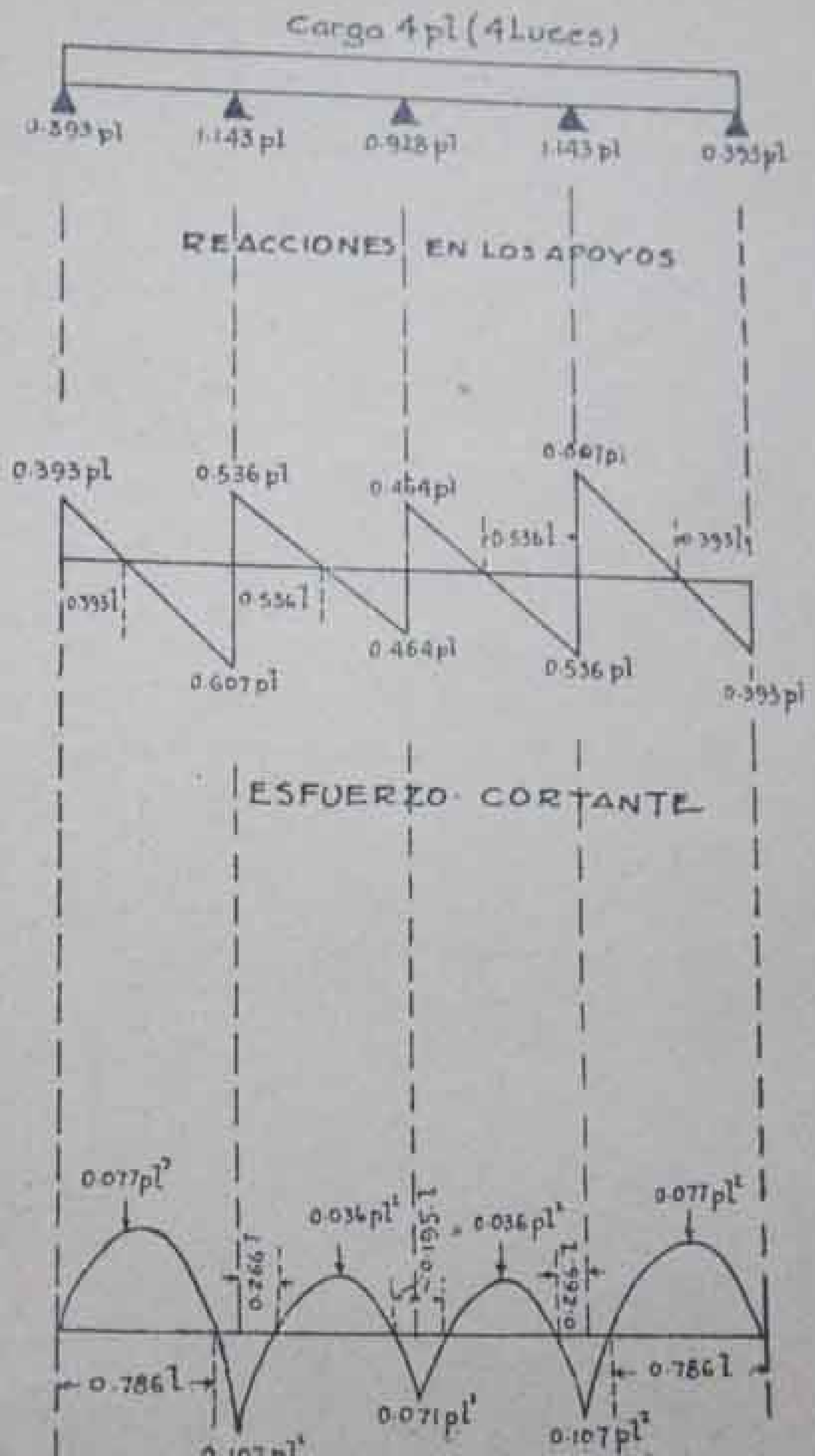
$$M=Pd \tag{22}$$

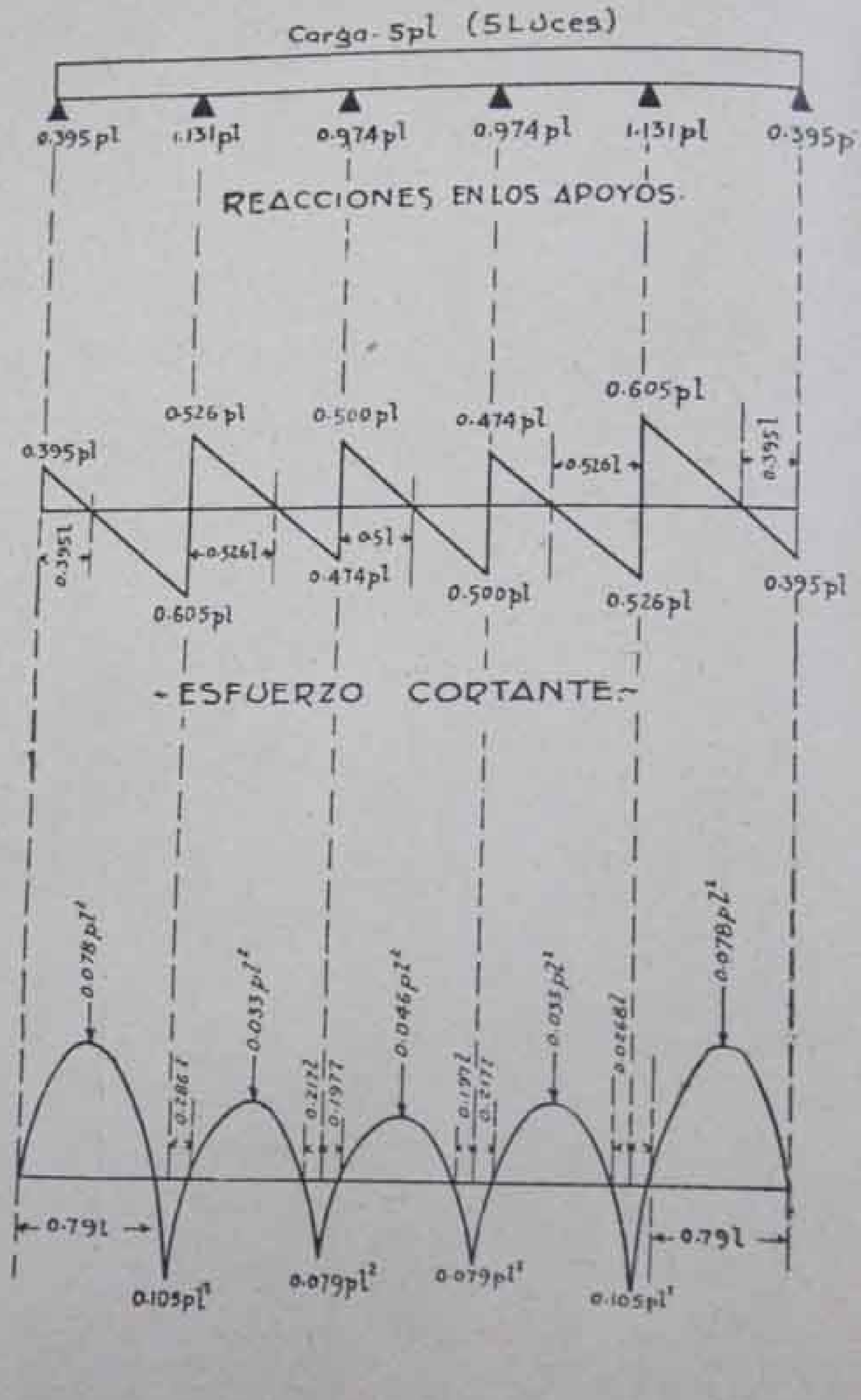
Y para el esfuerzo cortante veremos, según se indica en el diagrama que sigue a continuación, que tiene un valor cero entre los puntos de aplicación de las fuerzas, que cambia de signo en cada uno de ellos y que su valor máximo es a ambos lados de las fuerzas, igual a P en magnitud.

Fig. 11.

VIGAS CONTINUAS.—Cuando una viga se halla apoyada sobre tres o más soportes, recibe el nombre de viga continua. Los momentos flectores, esfuerzos cortantes y reacciones que en ellas actúan son variados para cada caso y si se tratara de considerarlos aisladamente y determinarlos para cada caso habría necesidad de hacer un estudio bastante complicado, por eso nos limitamos a dar a continuación diagramas representativos de dichos esfuerzos y sus magnitudes, para vigas de dos a seis luces, uniformemente cargadas.




Carga 4pl (4 Luces)
0.393 pl
1.143 pl
0.928 pl
1.143 pl
0.393 pl
REACCIONES EN LOS APOYOS
0.393 pl
0.536 pl
0.464 pl
0.607 pl
0.536 l
0.393 l
0.393 l
0.536 l
0.607 pl
0.464 pl
0.536 pl
0.393 pl
ESFUERZO CORTANTE
0.077 pl²
0.036 pl²
0.195 l
0.036 pl²
0.077 pl²
0.266 l
0.266 l
0.786 l
0.786 l
0.107 pl²
0.071 pl²
0.107 pl²


Carga- 5pl (5 Luces)
0.395pl
1.131pl
0.974pl
0.974pl
1.131pl
0.395pl
REACCIONES EN LOS APOYOS.
0.395pl
0.526pl
0.500pl
0.474pl
0.605pl
0.605pl
0.474pl
0.500pl
0.526pl
0.395pl
-ESFUERZO CORTANTE-
0.078pl²
0.033pl²
0.046pl²
0.033pl²
0.078pl²
0.791
0.791
0.105pl²
0.079pl²
0.079pl²
0.105pl²

PIEZA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS QUE SOPORTA UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA LONGITUD DE SU LUZ.—Sea la pieza AB de longitud l que tiene sus extremos empotrados en un muro en los puntos a y b y que soporta una carga de valor total P, distribuída uniformemente en toda su longitud.

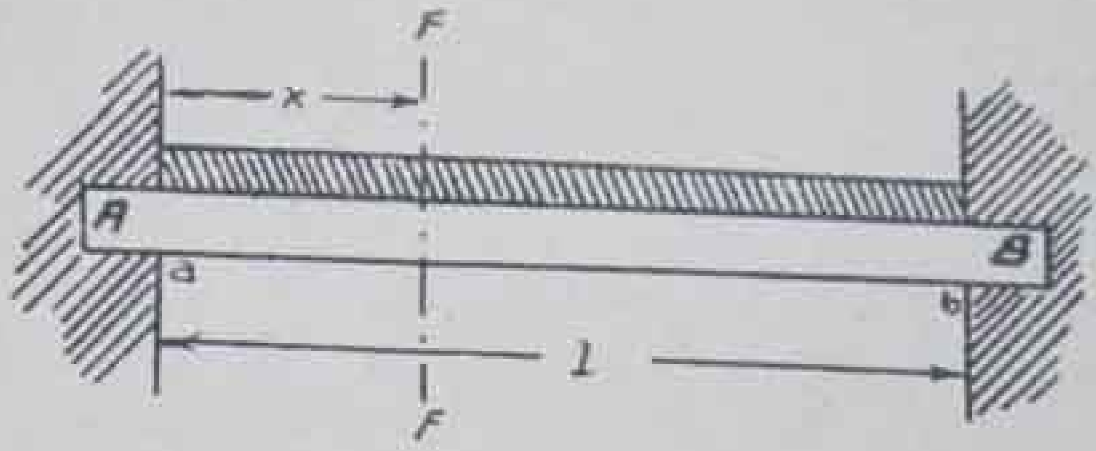


Fig. 12.

Si consideramos una pieza simplemente apoyada, sabemos que al flexarse bajo la acción de una cierta carga, sus extremidades tratan de levantarse tomando una nueva posición, que forma un cierto ángulo con la primitiva; pero si consideramos que sobre las porciones de viga que van de los puntos de apoyo a sus extremos, obra una cierta fuerza en toda su longitud, (el peso del muro en el caso que estudiamos) que deberá tener un punto de aplicación en el que actúa con toda su intensidad y la que deberá ser igual en magnitud a la reacción del apoyo, para que la pieza no efectúe ningún movimiento en esa parte, podremos considerar que en cada uno de los puntos de empotramiento actúa un par de fuerzas, al que se ha denominado *par de empotramiento.*

Por lo que hemos visto se comprenderá que las condiciones de las piezas dispuestas en esta forma y los efectos producidos en ellas por las fuerzas externas, son diferentes de los que hemos estudiado en los casos anteriores.

1º—*Determinación de las reacciones en los apoyos.*—Llamamos R y R' a las reacciones en los apoyos a y b y m y m' a los momentos de las fuerzas que hemos considerado que actúan sobre las secciones empotradas, a las que llamaremos Q y Q'; a dichos momentos m y m' se los denomina *momentos de empotramiento.* Si aplicamos la ecuación de equilibrio (1) y hacemos al punto de apoyo a, centro de momentos, tendremos:

$$m' - m + Pl/2 - Rl' = 0$$

Pero en esta ecuación tenemos dos términos desconocidos, los momentos *m* y *m'* y tampoco conocemos las fuerzas *Q* y *Q'* que los producen; estos valores no pueden ser determinados por los métodos que emplea la mecánica racional, si no por cálculo analítico y no siendo nuestro estudio suficientemente teórico como para emplear dicho procedimiento, únicamente indicaremos los valores que mediante él se obtiene para los valores *m* y *m'*:

$$m = m' = \frac{pl^2}{12}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación dada más arriba, tendremos:

$$pl^2/12 - pl^2/12 + Pl/2 - R'l = 0$$

De donde.

$$P/2 - R'l = 0$$

Y despejando el valor de R', tendremos que:

$$R' = P/2$$

Efectuando igual raciocinio con respecto al otro apoyo, obtendremos un valor igual para *R;* luego:

$$R = R' = P/2 \qquad [23]$$

2ª—*Determinación de los momentos flectores y esfuerzos cortantes.*—Supongamos cortada a la pieza en la sección FF situada a una distancia *x* del empotramiento *a*; hacia el lado izquierdo de ella tendremos actuando las siguientes fuerzas: la carga uniformemente repartida cuyo valor por unidad de longitud lo llamaremos *p*, la reacción en el apoyo del punto de empotramiento *a* y la fuerza Q que obra sobre la extremidad de la viga. El valor del momento flector en la sección FF estará dado por la suma algébrica de los momentos de las fuerzas que hemos mencionado; por lo tanto:

$$M = plx/2 - px^2/2 - pl^2/12 \qquad [24]$$

Ecuación que es la de una parábola cuyo eje coincide con el centro de la pieza, que por lo tanto a distancias iguales de los empotramientos nos dará valores equivalentes para los momentos flectores.

Si en dicha ecuación damos a *x* valores crecientes de cero a *l*, tendremos que:

Cuando $x=0$. . . . . $M=-pl^2|12$

,, $x=l|2$. . . . . $M=\ pl^2|24$

,, $x=l$ . . . . $M=-pl^2|12$

Es decir que el valor del momento flector es máximo en los empotramientos y de un valor igual a:

$$M=-\frac{pl^2}{12} \qquad (25)$$

El valor del esfuerzo cortante en la sección que estudiamos será igual a la suma algébrica de las fuerzas que actúan en la porción de viga comprendida entre el punto *a* y la sección mencionada; por lo tanto, siendo las fuerzas que en ella actúan, la reacción R y la carga uniformemente distribuida, cuyo valor es *px*, tendremos que:

$$E=R-px=P|2-px \qquad (26)$$

De esta ecuación obtendremos los siguientes resultados:

Cuando $x=0$ . . . . $E=\ P|2$

,, $x=l|2$ . . . . $E=\ 0$

,, $x=l$ . . . . $E=-P|2$

Empleando las fórmulas (24) y (26) que nos dan los valores de los momentos flectores y esfuerzos cortantes en una sección cualquiera de la viga, y utilizando una escala apropiada para los valores obtenidos, podremos trazar diagramas semejantes a los que siguen:

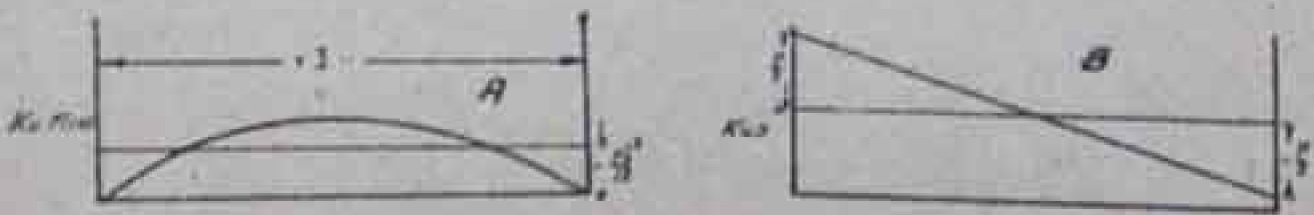


Fig. 13.

PIEZA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS QUE SOPORTA UNA CARGA CONCENTRADA EN LA MITAD DE SU LUZ.—Sea la pieza *AB* empotrada por sus extremos en los puntos *a* y *b*, que soporta una carga concentrada *P* en la mitad de su luz *l*. (Fig. 14)

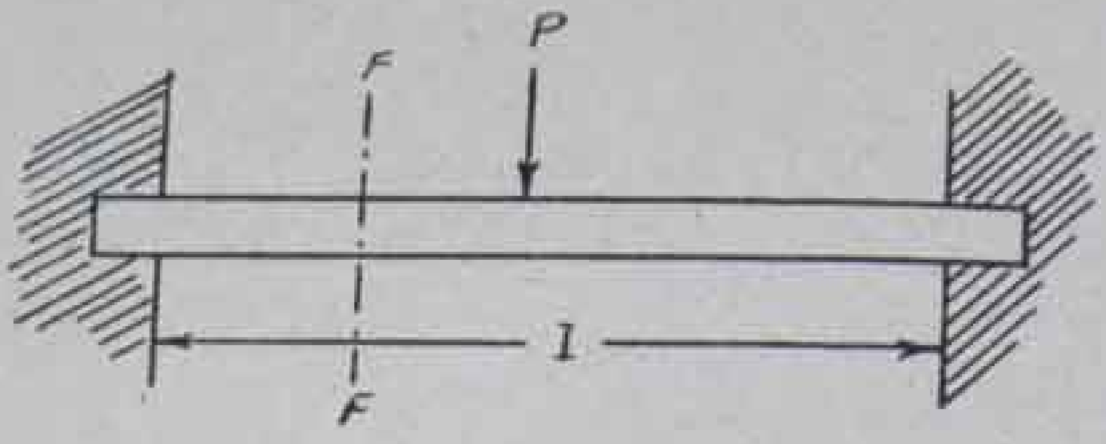


Fig. 14.

En el caso anterior vimos ya los principios en que se basa el estudio y determinación de los esfuerzos que se producen en vigas dispuestas en forma como la del presente caso, por lo tanto ciñéndonos a ello haremos nuestro estudio.

1º—*Determinación de las reacciones en los apoyos.*—Llamemos R y R' a las reacciones en los apoyos *a* y *b* y *m* y *m'* a los momentos de las fuerzas que actúan en sentido contrario en las secciones de empotramiento y tomando como centro de momentos al punto *a*, obtendremos:

$$m' - m + Pl/2 - R'l = 0$$

Ecuación en donde los valores de *m* y *m'* son desconocidos y no pueden ser determinados por los métodos empleados por la mecánica racional; su valor determinado por el cálculo analítico es:

$$m = m' = \frac{Pl}{8}$$

Por lo tanto, reemplazando estos valores en la ecuación anterior, tendremos:

$$\frac{Pl}{8} - \frac{Pl}{8} + \frac{Pl}{2} - R'l = 0 \text{ ; de donde: } R' = P/2 \qquad (27)$$

Determinando el valor de R en la misma forma, obtendremos un valor equivalente: por lo tanto:

$$R' = R = P/2$$

2º—*Determinación de los momentos flectores y esfuerzos cortantes en una sección cualquiera.*—Suponiendo cortada a la pieza en una sección cualquiera del lado izquierdo del punto de aplicación de la fuerza P, la FF por ejemplo, situada a una distancia *x* del punto de empotramiento *a*, tendremos que en la porción de viga comprendida hacia dicho lado, actúan las siguientes fuerzas: la reacción en el apoyo, cuyo valor ya conocido es P|2, que obra con un brazo de palanca igual a x, siendo su momento por consiguiente $Px|2$ y la fuerza que obra en sentido contrario en el empotramiento y cuyo momento hemos dicho que es igual a $Pl|8$; por lo tanto el momento del esfuerzo flector estará dado, según se ha visto en los casos anteriores, por el momento resultante de los dos citados; luego, sumándolos algébricamente, tendremos:

$$M=\frac{Px}{2}-\frac{Pl}{8} \qquad (28)$$

El valor del esfuerzo cortante estará dado por el de la reacción R, por considerarse a esta fuerza como la única que actúa en la porción de pieza que se estudia, ya que es equivalente y de sentido contrario a la que obra en el empotramiento; por lo tanto:

$$E=P|2 \qquad (29)$$

Tomando otra sección, situada al lado derecho del punto de aplicación de la fuerza y a una distancia x del empotramiento en a y estudiando únicamente la parte de pieza situada hacia el lado izquierdo de dicha sección, tendremos que en ella actúan las fuerzas siguientes: la reacción en R, cuyo momento es $Px|2$, la fuerza P que actúa con un brazo de palanca igual a $x-l|2$ y la que actúa en el empotramiento y cuyo momento es $Pl|8$. Sumando algébricamente estas fuerzas, obtendremos el valor del esfuerzo flector en la sección que se estudia; por lo tanto:

$$M=Px|2-P(x-l|2)-Pl|8 \qquad (30)$$

Y, para el esfuerzo cortante que:

$$E=P|2-P=-P|2 \qquad (31)$$

Si damos a x valores crecientes de cero a l y empleamos las fórmulas halladas para los momentos flectores (28) y (30), que nos deben dar valores equivalentes a distancias iguales de los apoyos, tendremos que:

Cuando x=0. . . . . .M=−Pl|8
,, x=l|2 . . . . .M= Pl|8
,, x=l . . . . .M=−Pl|8

Los esfuerzos cortantes serán de un valor igual en magnitud pero de signo distinto en las secciones de empotramiento y en el punto de aplicación de la fuerza cambian de signo. Los diagramas que se obtienen con el empleo de las fórmulas halladas son semejantes a los que a continuación se indican.

Fig. 15.

PIEZA EMPOTRADA POR UNO DE SUS EXTREMOS CON EL OTRO LIBRE Y CARGADA UNIFORMEMENTE EN TODA SU LONGITUD.—Sea la pieza AB empotrada por su extremo *a* que soporta una carga de valor total P distribuída uniformemente en toda su longitud.

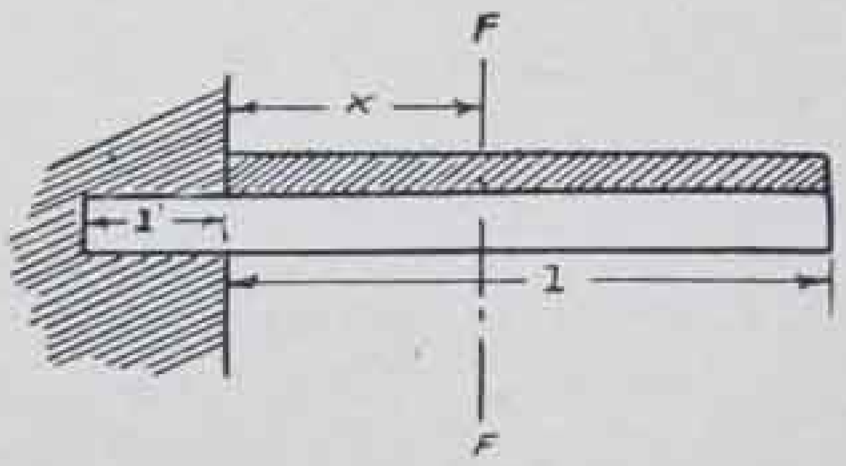


Fig. 16

1º—*Determinación de la reacción en el apoyo.*—Si llamamos Q al valor de la fuerza que según hemos visto en los dos casos anteriores actúa sobre la parte empotrada, oponiéndose a que la pieza gire sobre el punto de apoyo *a*, tendremos que para que ella se mantenga en equilibrio será necesario que se cumplan dos condiciones:

1ª—Que el valor del momento de la fuerza Q que actúa con un brazo de palanca igual a l' sea igual al de la fuerza P, a la que consideraremos actuando con toda su intensidad en la mitad de la distancia l; por lo tanto:

$$Ql' = Pl|2 = pl^2|2$$

2ª—Y, que en el punto de apoyo *a* exista una reacción igual al valor de la fuerza P; es decir que si llamamos R a dicha reacción, tendremos que:

$$R = P \qquad (32)$$

2º—*Determinación de los momentos flectores y esfuerzos cortantes.*—Supongamos cortada a la viga en una sección FF distante del apoyo *a* una cierta distancia x y tendremos entonces que hacia el lado derecho de dicha sección obra únicamente la carga uniformente repartida, cuyo valor, si llamamos p a la carga por unidad de longitud, será: $p\ (l-x)$; el punto de aplicación de esta carga estará en la mitad de la distancia de la sección FF al extremo libre del apoyo, por consiguiente el brazo de palanca con que actúa dicha fuerza será $(l-x)\ |2$ y el valorde su momento será:

$$M = p(l-x)\ .\ \frac{l-x}{2} = \frac{p(l-x)z.}{2}$$

Si damos a x valores crecientes de cero a l, obtendremos los siguientes resultados:

Cuando $x=0$. . . . . $M = \frac{pl}{2}$

,, $x=l$ . . . . $M=0$

Lo que nos dice que el momento flector máximo será en la sección de empotramiento y su valor igual a:

$$M = \frac{pl}{2} \tag{33}$$

El valor del esfuerzo cortante en la sección considerada tendrá que ser igual, empleando para determinarlo el mismo método que en los casos anteriores, a la suma algébrica de las fuerzas que actúan en la porción de viga que se considera, por lo tanto su valor estará dado por el de la única fuerza que en ella actúa que hemos dicho ser $p(l-x)$, el que determinado con relación a P será:

$$E = P - px \tag{34}$$

Si en esta ecuación damos a x valores crecientes de cero a a l, tendremos que:

Cuando $x=0$. . . .. $E=P$

,, $x=l$ . . . .$E=0$

Los diagramas que se obtienen mediante el empleo de las fórmulas obtenidas para el momento flector y el esfuerzo cortante son semejantes a los que siguen:

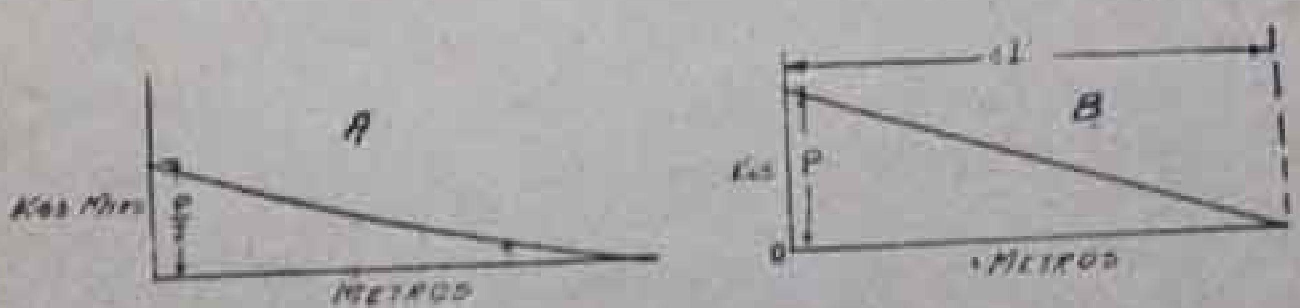


Fig. 17.

PIEZA EMPOTRADA POR UNO DE SUS EXTREMOS QUE SOPORTA UNA CARGA CONCENTRADA EN SU EXTREMO LIBRE.—Sea la pieza AB empotrada por su extremo *a* que soporta una carga concentrada P en su extremo libre:

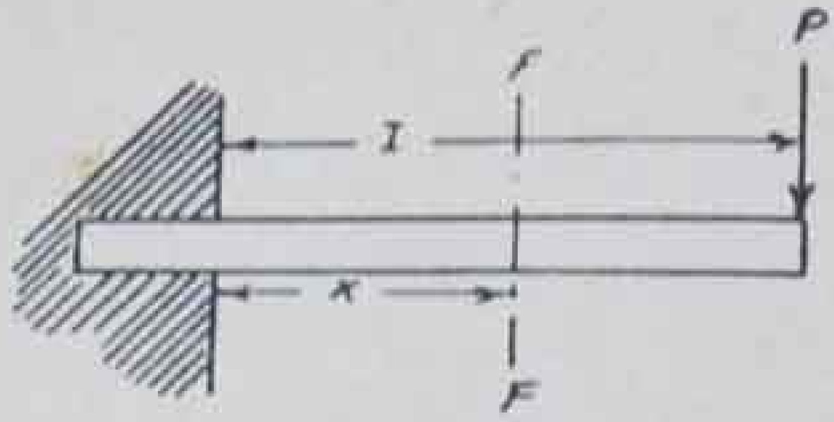


Fig. 18.

1º—*Determinación de la reacción en el apoyo.*—La reacción en el punto *a*, se determina en este caso siguiendo un procedimiento semejante al explicado en el caso anterior, y se obtiene un resultado equivalente. Por lo tanto el valor de dicha reacción a la que llamaremos *R*, será:

$$R = P \qquad (35)$$

2º—*Determinación de los momentos flectores y esfuerzos cortantes.*—Supongamos cortada la pieza en la sección FF distante una distancia x del punto de empotramiento; hacia el lado derecho de dicha sección tendremos que únicamente actúa la fuerza P, con un brazo de palanca igual a la longitud $l-x$ y sabiendo que el momento flector en una sección cualquiera de una viga es igual al momento de la resultante de las fuerzas que actúan en la porción de pieza que se considera, tendremos que:

$$M = P(l-x) \qquad (36)$$

Fórmula en la que vemos que M aumenta cuando x disminuye, de donde podremos concluir que cuando x es igual a cero, M llega a su máximo, siendo su valor el siguiente.

$$M = Pl \qquad (37)$$

El valor del esfuerzo cortante es igual al de la fuerza P en todas las secciones de la viga, por lo tanto: E=P.

Con las fórmulas obtenidas para el momento flector y el esfuerzo cortante, obtendremos diagramas semejantes a los que se dan a continuación.

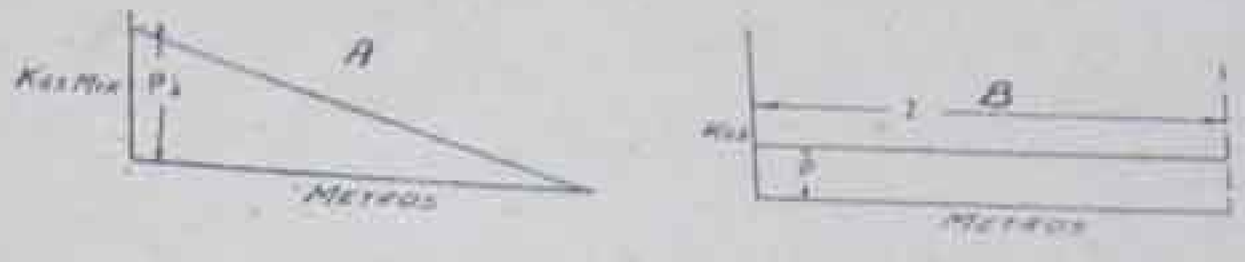


Fig. 19.

Como conclusión del estudio efectuado, referente a los momentos flectores y esfuerzos cortantes de los casos que más corrientemente se presentan en la práctica, diremos que casi nunca se puede llegar a conseguir el empotramiento ideal y que la libertad completa en los apoyos jamás llega a obtenerse, por razón de la continuidad que siempre se procura que exista en las estructuras: de aquí que en construcciones de hormigón armado siempre se toma como valor del momento flector máximo en vigas de una sola luz, la media aritmética de los valores de los momentos que hemos determinado en nuestro estudio.

DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS MOLECULARES QUE OBRAN EN LAS SECCIONES AFECTADAS POR LA FLEXION Y EL ESFUERZO CORTANTE.—Terminado el estudio y determinación de los esfuerzos cortantes y momentos flectores para algunos casos de vigas, vamos ahora a estudiar los esfuerzos moleculares que deben producirse en cualquier sección de ellas para que resistan sin romperse los dos esfuerzos mencionados.

Resistencia a la flexión.—Hemos visto en el resumen que, de la teoría de la flexión hicimos al principio que, todos los alargamientos y acortamientos que se producen en las piezas sometidas a dicho esfuerzo, son directamente proporcionales a sus distancias a la fibra neutra. Partiendo de este principio general y denominando t a la tensión que ha obrado sobre la fibra aa' (véase la figura) para alargarla la longitud $a'a''$ y T a la que ha obrado sobre la más alejada de la fibra neutra, o sea la extrema CD para alargarla la longitud DD'; tendremos que:

$$\frac{t}{T} = \frac{a'a''}{DD'} \qquad \text{(a)}$$

Si examinamos la figura, veremos que los triángulos $DD'O$ y $a'a''O$ son semejantes y por lo tanto podremos decir que:

$$\frac{a'0}{DO} = \frac{a'a''}{DD'} \qquad \text{(b)}$$

En donde, reemplazando en la ecuación (a), tendremos que:

$$\frac{t}{T} = \frac{a'0}{D0} \qquad \text{(c)}$$

que nos dice que la tensión sufrida por una fibra cualquiera es directamente proporcional a su distancia a la fibra neutra, quedando probado así lo que en términos generales se expuso en el resumen de la teoría general de la flexión.

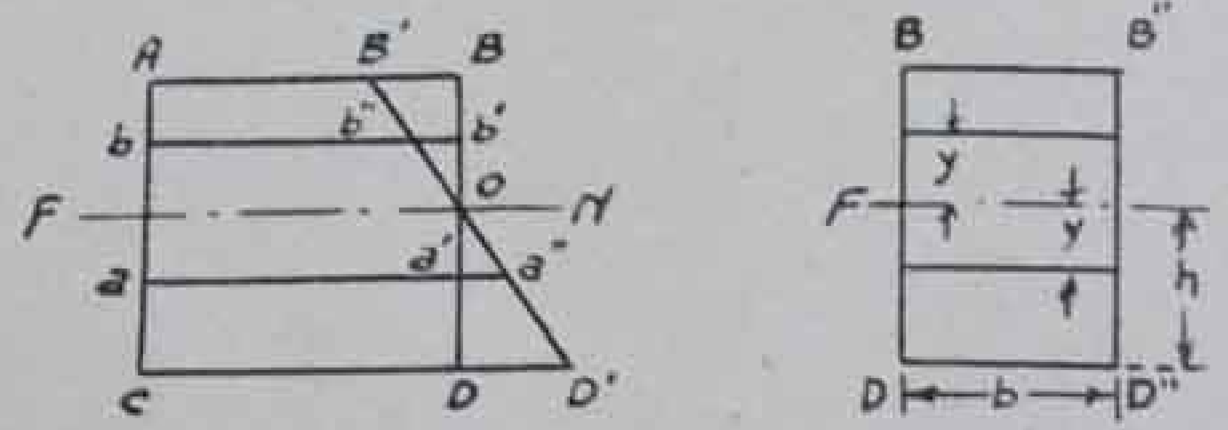


Fig. 20.

Si según lo demostrado, es la fibra más alejada de la fibra neutra la que sufre la mayor tensión, a la que hemos llamado *T*, bastará por lo tanto para que la pieza no se rompa en la sección en estudio, que en ella exista una resistencia *R* igual o mayor que el esfuerzo *T*. El valor de *R* depende pues exclusivamente de la resistencia que por unidad de superficie tiene el material de que está hecha la pieza.

Entrando a considerar ahora el espesor de la viga, tendremos (como se ve en la figura que representa el corte transversal de la viga en la sección en estudio) que a una misma distancia del eje neutro existen numerosas fibras, *aa'* por ejemplo, que determinan el espesor de la pieza y que están afectadas por los mismos esfuerzos, ya que se encuentran a distancias iguales, *y* en nuestro ejemplo, de la fibra neutra. Si a la superficie formada por las secciones de dichas fibras, que es realmente infinitamente pequeña, la suponemos de una altura *e* y de una base que es igual al espesor *b* de la viga, ella estará determinada por *be*. Anteriormente hemos llamado *t* a la tensión que se ha producido sobre la fibra *aa'*, por lo tanto, la tensión total *F* que sufre la superficie *be*, será: $F = tbe$ (d)

De acuerdo con la ecuación (c) hallada y utilizando los valores correspondientes a este caso, tendremos que:

$$\frac{t}{T} = \frac{y}{h} \text{ ; de donde: } t = T\,\frac{y}{h} \qquad (e)$$

Reemplazando este valor de *t* en la fórmula [d], tendremos:

$$F = \frac{T}{h}\ ybe \qquad (f)$$

Efectuando un raciocinio semejante con referencia a la parte de superficie afectada por esfuerzos de compresión, obtendremos resultados parecidos por ser semejantes las fórmulas que a ambos esfuerzos se refieren.

Analizando los distintos esfuerzos de tensión y compresión que se producen a ambos lados de la fibra neutra (en nuestro ejemplo en la lámina *be* y en su semejante al otro lado de ella), que a distancias iguales de ella son equivalentes y de sentido contrario, veremos que la resultante de todos ellos, tomados dos a dos, debe ser cero necesariamente, pero que forman un par final cuyo momento será:

$$m = F\ .\ 2\ y \qquad (g)$$

Si en esta fórmula reemplazamos el valor de *F*, que representa el esfuerzo total de tensión en la lámina *be*, que fue encontrado mediante la fórmula (f), tendremos que:

$$m = 2\,\frac{T}{h}\ y^2be \qquad (h)$$

El valor *m* encontrado representa como hemos visto el momento del par de fuerzas que actúa en las dos láminas semejantes *be* situadas a distancias *y* del eje neutro; por lo tanto el par resultante final, correspondiente a toda la superficie de la sección deberá ser igual a la suma de todos los momentos parciales, en la que el término $T|h$ entra como factor común de todos ellos; así, llamando *M* al momento del par resultante, tendremos que:

$$M = \frac{T}{h}\ (\sum 2y^2be) \qquad (i)$$

Examinando el segundo factor del segundo término de la ecuación hallada, veremos que $\sum 2y^2be$ es en realidad el momento de inercia de la superficie *BB''DD''*, pues representa la suma de productos de las secciones de las fibras que la forman multiplicados por los cuadrados de sus distancias respectivas al eje que pasa por el plano en que se encuentra la fibra neutra.

Sabiendo que el momento de inercia de un rectángulo con respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad es igual al cuociente que resulta de dividir por 12 el producto de su base por la altura elevada a la tercera potencia, y, de acuerdo con lo que hemos visto en la teoría de la flexión que dice, que la fibra neutra de los prismas regulares está situada en el centro de gravedad o de figura, tendremos que:

$$I = \frac{8bh^3}{12} = \frac{2}{3} bh^3 \qquad (j)$$

Si reemplazamos este valor por el factor $\cong 2y^2 bc$ en la fórmula (i) que hemos visto que es igual al momento de inercia de la superficie en estudio, tendremos:

$$M = \frac{T}{h} I = \frac{T}{h} \cdot \frac{2}{3} bh^3 = \frac{2}{3} bh^2 T \qquad (k)$$

Estudiando la fórmula final (k) obtenida veremos que puede ser dividida en dos partes:

1º.—Una que es *2/3 bh²* y que no es otra cosa que el momento de inercia *I*, partido por *h*, es decir:

$$2/3 bh^2 = \frac{2/3 bh^3}{h} = \frac{I}{h} \qquad (1)$$

A este cuociente encontrado *I/h* se lo denomina generalmente *módulo de flexión* y convencionalmente se lo representa así: *I/V*, en donde la distancia *h* ha sido substituida por *V*.

2º.—Y otra que es el factor *T* que representa el esfuerzo de tensión por unidad de superficie que se produce en las fibras más afectadas, el que hemos dicho que debe ser igual o menor que el coeficiente *R* que depende de la naturaleza misma del material de la pieza y al que se denomina *coeficiente de resistencia*.

Finalmente, al momento *M* que representa el momento del par resultante con respecto a toda la sección considerada, se lo denomina *momento resistente*.

Por lo tanto, de acuerdo con lo que acabamos de decir y y generalizando, tendremos que:

$$M = \frac{I}{V} R \qquad (n)$$

que representa el valor de los esfuerzos moleculares que deben producirse en una sección cualquiera de una pieza, el que tiene que ser necesariamente igual al valor del momento flector que en ella actúa para que la pieza no se rompa en la sección considerada. Es decir que, llamando *M'* al momento flector:

$$M' = M = \frac{I}{V} R \qquad (o)$$

Resistencia al esfuerzo cortante.—Generalmente se admite que el valor del coeficiente de resistencia al esfuerzo cortante es igual al de resistencia a la flexión, para piezas prismáticas de sección uniforme, que son a las que se refiere todo nuestro estudio. Por lo tanto para determinar si una sección cualquiera de una viga de este tipo, resiste a un determinado esfuerzo cortante que sobre ella actúa, bastará obtener el valor del esfuerzo cortante por unidad de superficie y luego compararlo con el del coeficiente de resistencia *R*, al que tendrá que ser igual o menor. En la práctica se considera que cuando la condición de resistencia de una viga de material homogéneo, al esfuerzo flector está satisfecha, la del esfuerzo cortante lo está a su vez.

Para poder calcular la sección que debe tener una viga de sección constante y de luz conocida, que soporta cargas también conocidas, o para determinar si una viga de sección dada soportará una cierta carga, habrá que partir de la fórmula que corresponde al momento resistente y de las que hemos encontrado, para algunos casos, para los momentos flectores máximos.

El procedimiento general que deberá seguirse, es el siguiente:

1º—Calcular el momento flector máximo;

2º—Determinar el momento resistente en la sección de viga en que se produce el momento flector máximo; y

3º—Comparar ambos resultados; si el primero es menor que el segundo, la viga soportará perfectamente sin romperse la acción de las cargas, cosa que no sucederá en el caso contrario.

En el primer caso, cuando el problema consiste en determinar la sección de la viga, para una cierta luz y una cierta carga, para poder determinar su momento resistente no conociendo aún la sección de ella, hay que proceder por tanteos, hasta llegar con la sección cuyo momento resistente se acerque más al flector, para tener así la mayor economía compatible con la seguridad.

El método que acabamos de indicar para el cálculo de vigas de sección constante, se emplea únicamente cuando ellas están hechas de materiales homogéneos, como madera o hierro.

SEGUNDA PARTE

CALCULO DE VIGAS DE HORMIGON ARMADO AFECTADAS POR ESFUERZOS DE FLEXION Y CORTANTES.

Conceptos generales sobre hormigón armado.

Se denomina hormigón armado o cemento armado al material de construcción constituído por un entramado o armadura metálica, de hierro o acero, que ha sido colocado dentro de una masa o envoltura de hormigón de cemento antes de su fraguado. Dicho entramado debe quedar perfectamente cubierto en todas sus partes por el hormigón, material que es el que adopta la forma determinada que se desea dar a las piezas y que está constituído por una mezcla de cemento (Portland), piedra partida o grava y arena, endurecida por adición conveniente de agua. El empleo del hormigón armado es casi ilimitado debido a la relativa facilidad con que se pueden fabricar toda clase de piezas de formas variadas, empleando moldes a propósito.

Cada uno de los materiales citados, hormigón de cemento y hierro o acero, han sido calculados para soportar esfuerzos determinados, diferentes, sin comprometer la unidad del conjunto. Así, al hierro debido a su gran resistencia a la tracción, compresión y esfuerzo cortante, cuyos coeficientes de trabajo son aproximadamente de 800 a 1.000 Kg./cm^2 para los dos primeros y de 600 a 800 Kg./cm^2 para el tercero, se lo dispone para que soporte los esfuerzos de tracción y cortantes; y al hormigón de cemento que tiene un coeficiente de trabajo a la tracción casi despreciable, comparado con el del hierro o acero, y cuyos coeficientes de trabajo a la compresión y al esfuerzo cortante son, de 30 a 50 Kg./cm^2 para el primero, y aproximadamente el 60% de él para el segundo, se lo dispone para que trabaje solamente a la compresión y a los esfuerzos cortantes.

La importancia principal del hormigón armado estriba en que en él se ha conseguido combinar dos materiales heterogéneos, de una manera tal que cuando la disposición de la armadura se hace racionalmente, ambos trabajan conjuntamente sin temerse las desagregaciones que la masa pudiera sufrir, ni por efecto de la dilatación térmica (el coeficiente de dilatación térmica del acero varía entre 0.0000130 y 0.0000148 por grado centígrado y el del hormigón es aproximadamente de 0.0000135 por grado centígrado) ni por efecto de la destrucción por oxidación o herrumbre de la parte metálica, ya que ella queda perfectamente protegida por la capa de hormigón que la envuelve.

El entramado metálico o refuerzo, debe ser de una forma y dimensiones tales que permita sea incorporado fácilmente como parte de la estructura de las piezas y que tenga además una superficie de adherencia entre los dos materiales, suficiente para mantenerlos perfectamente unidos. Para prevenir la actuación de grandes esfuerzos en partes determinadas del hormigón, que pudieran estar no reforzadas por el metal, se lo emplea a este en piezas de secciones relativamente pequeñas, usándoselo generalmente en forma de varillas de variadas formas.

Resumiendo diremos que son tres los puntos principales en que se basa la eficiencia y bondad del hormigón armado, como material constructivo:

1º—Que el hormigón de cemento y el hierro forman una combinación homogénea y sólida, de manera que en las diversas deformaciones que sufre el conjunto, se comportan como un material único;

2º—Que existe una gran aproximación entre los coeficientes de dilatación térmica de ambos materiales, ya que aún en grandes aumentos de temperatura, como se ha podido comprobar en ciertos casos, no se pierde la unidad de conjunto pues cuando más se producen únicamente pequeñas tensiones internas; y,

3º—Que el hormigón protege perfectamente contra la oxidación y herrumbre al hierro que se encuentra envuelto por él.

A continuación damos ciertos datos referentes a estos dos materiales y una tabla de las diferentes proporciones de los materiales que constituyen el hormigón de cemento, que pueden emplearse, y las cantidades en que entran en cada una de ellas.

Coeficiento de adherencia del hormigón al metal. . . .	40 a 70 Kg.	cm2
„ „ elasticidad del acero dulce.	2200000 „	„
„ „ „ „ hormigón	224000 „	„
Gravedad específica del hormigón	De 1.9 a 2.4	
„ „ „ hierro o acero.	„ 6.8 „ 7.9	
Peso del hormigón de cemento (aprox).	2.500 Kg.	M³
„ „ hierro o acero (término medio aprox) . .	7.500 „	„

TABLA DE LAS PROPORCIONES DE MEZCLA MAS USADAS PARA EL HORMIGON DE CEMENTO Y CANTIDADES DE MATERIAL

Por metro cúbico.

Proporción	Cemento—Kilos	Arena—M^3	Piedra—M^3
1 : 1.5 : 3	425	0.42	0.85
1 : 2 : 3	383	0.52	0.77
1 : 2 : 4	340	0.45	0.89
1 : 2.5 : 5	272	0.46	0.92
1 : 3 : 6	221	0.47	0.94

TABLA DE LAS PROPORCIONES DE MEZCLA MAS USADAS PARA EL MORTERO DE CEMENTO Y CANTIDADES DE MATERIAL.

Por metro cúbico.

Proporción	Cemento—Kilos	Arena—M^3
1 : 1	1.062	0.72
1 : 2	680	0.95
1 . 3	510	1.06
1 : 4	425	1.13

En la práctica para el cálculo de materiales para obras de relativa importancia por sus proporciones, se acostumbra aumentar en un 30% el valor que se obtenga para el volumen total de arena, debido, tanto a la gran facilidad con que se desperdicia este material como a la disminución de volumen por evaporación que experimenta, ya que generalmente se lo entrega húmedo en las obras.

Disposición del entramado o armadura metálica.

En las armaduras se disponen los hierros según la clase de trabajo que deben efectuar en el conjunto, distinguiéndose así, tres clases o tipos de hierros, que son:

Hierros de tracción.—Los que se disponen para que soporten las tensiones que por efecto de la flexión se producen en determinadas partes de las piezas; la sección y número de estos hierros deberá determinarse mediante las fórmulas y tablas que se dá más adelante.

Hierros de repartición.—Los que se emplean para ligar perfectamente los hierros de tracción y distribuir sobre ellos uniformemente las cargas; por lo general son de un diámetro menor que los anteriores.

Estribos.—Son hierros cuyo objeto principal, a más de dar mayor solidez al entramado consiste en que se los dispone para que obren contra las tensiones de deslizamiento producidas por los esfuerzos cortantes.

A continuación damos las reglas más importantes que rigen la colocación de los hierros en el entramado metálico de las piezas:

1ª—La distancia longitudinal entre los estribos no debe ser nunca mayor de la mitad de la altura de las piezas.

2ª—Siempre debe dejarse entre las varillas espacio suficiente que permita la colocación conveniente del hormigón alrededor de ellas.

3ª—La sección de hierro en el plano de la viga que se trata de reforzar debe ser siempre la necesaria para soportar los esfuerzos de tensión y cortantes que en él obren.

4ª—El espacio lateral entre las varillas no debe nunca, en ningún caso ser menor de tres diámetros, centro a centro.

5ª—La distancia entre las caras laterales de las vigas y las varillas más cercanas no debe ser nunca menor de dos diámetros.

6ª—Los hierros deben estar siempre protegidos por una capa de hormigón por lo menos de dos centímetros de espesor.

7ª—Se debe evitar lo más posible hacer empalmes entre las varillas, pero cuando sea necesario hacerlo se sobrepondrán los extremos que se trata de unir, por lo menos en una longitud igual a 67 diámetros.

DETERMINACION DE LAS FORMULAS FUNDAMENTALES PARA EL CALCULO DE VIGAS RECTANGULARES DE HORMIGON ARMADO.

Hemos dicho al hablar en términos generales del hormigón armado que el hormigón de cemento y el hierro o acero que entran en su composición, deben estar combinados en una forma tal que en las deformaciones que sufra el conjunto, bajo la acción de ciertos esfuerzos, ambos deben trabajar como un material único; el estudio que sigue a continuación y los resultados prácticos que de él se trata de obtener, están basados en esta idea.

Antes de comenzar nuestro estudio vamos a dar la lista de letras que se van a emplear y sus significados:

A_s —Area del hierro o acero que trabaja a la tracción—Centímetros^2

h —Espesor de la viga—Centímetros

d —Distancia de la fibra más afectada por la compresión, al centro del refuerzo—Centímetros.

f_c —Coeficiente de trabajo del hormigón a la compresión—Kg.| cent.^{2}

f_s —Coeficiente de trabajo a la tracción del hierro o acero—Kg|. cent.^{2}

k —Relación entre la distancia a que la fibra neutra se encuentra de la fibra más afectada por la compresión y la distancia *d* — Coeficiente

j —Relación entre el brazo de palanca del par resistente actuante y la distancia *d* — Coeficiente

M —Momento resistente o momento flector, en general — Kilocentímetros

n —Relación entre el módulo de elasticidad del acero y el del hormigón. En la práctica a este coeficiente se le da un valor de 12 o 15, según los materiales empleados.

p —Relación entre el área efectiva del refuerzo para tracción y el área efectiva de hormigón. — Coeficiente.

Nota importante: Como los valores que se obtienen mediante estas fórmulas para el momento flector y momentos resistentes del hierro (M_s) y del hormigón (M_c), están dados en kilocentímetros, es necesario dividirlos por 100 para obtenerlos en kilográmetros.

Para que una viga de hormigón armado actúe como si fuera hecha de un material único, homogéneo, como se ha dicho al principio de este estudio, es necesario que su resistencia total a la compresión sea igual a su resistencia total a la tensión, es decir, según se ve en la figura, que:

$$A_s f_s = 1/2 \; f_c \, kdb \qquad \text{(a)}$$

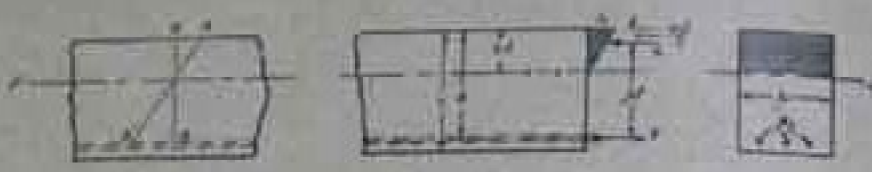


Diagrama de Deformación Diagrama de Esfuerzo Sección

Sabemos también por un principio general de la flexión ya estudiado, que las deformaciones varían proporcionalmente a sus distancias a la fibra neutra; de donde podremos decir que:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{kd}{d-kd} \qquad \text{(b)}$$

Y, siendo las deformaciones proporcionales a los esfuerzos y llamando E al módulo de elasticidad, o sea a la relación que existe entre el esfuerzo unitario y la deformación por unidad de longitud, y considerando a la porción de viga que se estudia como unidad de longitud, tendremos que:

$$AA' = \frac{f_c}{E_c} \; ; \text{ y también: } \; BB' = \frac{f_s}{E_s} \qquad \text{(c)}$$

De donde, si dividimos el uno por el otro y llamamos *n* a la ariación existente entre el módulo de elasticidad del hierro o ecero y el del hormigón, tendremos que:

$$\frac{AA'}{BB'} = n\frac{f_c}{f_s} \qquad \text{(d)}$$

Igualando las ecuaciones (b) y (d), nos queda:

$$n\frac{f_c}{f_s} = \frac{kd}{d-dk} \qquad \text{(e)}$$

De donde, despejando los valores de f_s y f_c, separadamente, tendremos:

$$f_s = \frac{nf_c\,(1-k)}{k} \; ; \text{ y, } \; f_c = \frac{f_s k}{n(1-k)} \qquad (1)$$

Ecuaciones que nos dan los valores de los esfuerzos en el concreto y en el acero, en una viga rectangular cualquiera que soporte una cierta carga, siempre que se conozca el coeficiente *k*. Vamos a encontrar el valor de este coeficiente.

En la ecuación (a) tenemos que: $1/2\ f_c kdb = A_s f_s$; de donde tendremos que:

$$k = \frac{2A_s f_s}{f_c db} \qquad (f)$$

Y, si a la relación entre el área efectiva de refuerzo y el área efectiva de hormigón, A_s/db, la llamamos p, tendremos:

$$k = \frac{2pf_s}{f_c} \qquad (g)$$

Igualdad en la que si substituímos el valor de f_s, por el obtenido en la ecuación (1), nos quedará:

$$k = \frac{2pn(1-k)}{k} \qquad (h)$$

De donde resolviendo el valor de *k*, tendremos que:

$$k = \sqrt{2pn + pn^2} - pn \qquad (2)$$

Este valor encontrado para *k* es independiente de los coeficientes de trabajo (f_c) y (f_s) del hormigón y del hierro o acero, pero depende exclusivamente de la proporción de hierro en la viga y de la relación entre los módulos de elasticidad de dichos materiales; por consiguiente no se lo puede emplear para el cálculo de las secciones de hormigón o de acero cuando se estudia una viga, pero puede ser usado para revisar cálculos ya efectuados o cuando se desea conocer los esfuerzos o momentos resistentes en una viga cuya sección y área de refuerzo se conocen:

Si nos fijamos en la figura, veremos que:

$$jd = d - \frac{kd}{3} \text{ ; de donde, } j = 1 - \frac{k}{3} \qquad (3)$$

Este valor se obtiene considerando que la resultante de los esfuerzos de compresión está aplicada en el centro del triángulo que representa la distribución de dichas fuerzas, o sea a una distancia igual a *Kd/3* de la fibra más afectada por la compresión.

Sabemos que el momento resistente de una viga depende de la resistencia del hormigón y del acero o hierro que en su formación han intervenido: y que, los momentos resistentes de cada uno de ellos deben ser iguales a los esfuerzos que sobre ellos obran, o sea, a la compresión en el hormigón y a la tensión en el acero multiplicadas por el brazo de palanca del par actuante, *jd;* por lo tanto:

$$M = (1/2 f_c k d b) jd = 1/2 f_c k b j d^2 \qquad (4)$$

Siendo $p = A_s / bd$; $A_s = pbd$; luego:

$$M = A_s f_s j d = p f_s j b d^2 \qquad (5)$$

Fórmulas que determinan los valores de los momentos resistentes del hierro y del hormigón.

En el cálculo de vigas de hormigón armado la tendencia debe ser siempre a dar a el acero y al hormigón secciones tales que se llegue simultáneamente a los valores límites de sus momentos resistentes, para evitar que, por ejemplo, una viga pueda romperse bajo un determinado esfuerzo de compresión en tanto que el acero no llega ni cercanamente al límite de su resistencia. Si la mencionada condición ideal se consigue obtener en una pieza, tendremos que:

$$M_c = M_s$$

Y, por lo tanto, llamando M al momento resistente en general, se tendrá:

$$M = 1/2 f_c k b j d^2 = p f_s j b d^2$$

En donde si sacamos al factor *bd*, como factor común en ambos casos tendremos que:

$$bd^2(1/2 f_c k j) = bd^2(p f_s j)$$

Para que las igualdades anteriores se cumplan, los valores contenidos en el paréntesis tendrán que ser iguales y si a dicho valor lo llamamos *K*, tendremos:

$$M = K d b^2 \qquad (6)$$

Llamando *r* a la relación existente entre f_s y f_c, en la ecuación (e), tendremos,

$$\frac{n}{r} = \frac{k}{1-k}$$

En ponde resolviendo el valor de *k*, se obtendrá:

$$k = \frac{n}{n+r} \qquad (7)$$

En esta fórmula el valor de *k* depende únicamente del coeficiente de trabajo del hierro y del del hormigón y además del valor de la relación entre los módulos de elasticidad de estos dos materiales. Por lo tanto, este valor de k sí puede ser usado para el cálculo de una viga cualquiera, y no para revisión puesto que los valores simultáneos de f_s y f_c son desconocidos.

Finalmente, partiendo de la fórmula (7) y de la idea previamente expuesta de que los valores límites de los momentos resistentes del hierro y del hormigón deben ser iguales, o sea que: $1|2\ f_c kj = pf_s j$; tendremos que:

$$p = \frac{1|2 f_c kj}{f_s j} = \frac{f_c kj}{2 f_s j} \qquad \text{(i)}$$

Y sabiendo que a la relación $f_s|f_c$ la hemos llamado antes r, tendremos:

$$p = \frac{k}{2r} \qquad \text{(j)}$$

Y si para cualquier valor de f_s o f_c, $k = n|n+r$, el valor de p, será:

$$p = \frac{n}{2r(n+r)} \qquad \text{(8)}$$

De donde podremos decir que siempre que el valor de $p = A_s/bd$ iguale al dado en la fórmula (8) los valores de M_s y M_c serán equivalentes.

Esfuerzo cortante

Para determinar las fórmulas que dan las secciones de hierro de los estribos, los que según hemos visto son armaduras que se disponen verticalmente dentro de la masa de las vigas para que soporten los esfuerzos cortantes verticales y horizontales que en ellas actúan, tendremos que partir de un principio general de este esfuerzo que dice: "el esfuerzo cortante horizontal en una viga cualquiera es siempre igual al esfuerzo cortante vertical que en ella actúa". La fórmula que representa el valor del esfuerzo cortante horizontal por unidad de longitud en un plano cualquiera situado entre la armadura de tracción y la fibra neutra es:

$$E_h = \frac{E}{jd} \qquad \text{(9)}$$

En donde E representa el valor del esfuerzo cortante vertical total y *jd*, la distancia del centro de la armadura de tracción a la fibra en que se considera que actúa el término medio del esfuerzo de compresión que se produce en la viga.

Por lo tanto el valor del esfuerzo cortante horizontal, correspondiente a una porción de longitud *s*, será:

$$Eh = \frac{Ev \cdot s}{jd}$$

El valor Ev representa el término medio del esfuerzo cortante vertical que actúa en la porción de viga *s*.

De la última fórmula dada y llamando A_s al total de la sección de los estribos en un plano horizontal y f_s al coeficiente de trabajo del hierro y asumiendo que el hormigón soportará las dos terceras partes del esfuerzo cortante total, tendremos que:

$$Eh = A_s f_s = \frac{2\ Evs}{3\ jd} \qquad (10)$$

Y si llamamos E'v al esfuerzo cortante externo que actúa en cualquier sección, deducido del que se considera que puede soportar el hormigón, se cumplirá la igualdad siguiente:

$$A_s\ f_s = \frac{E'vs}{jd} \qquad (11)$$

El valor de la longitud *s* que se considera en las fórmulas anteriores, estará dado por:

$$s = \frac{3A_sf_sjd}{2\ Ev}\ ;\ i,\ s = \frac{A_sf_sjd}{E'v} \qquad (12)$$

El método que generalmente se emplea en la práctica para el cálculo de estos hierros, consiste en escoger primero una varilla de sección determinada y luego calcular la distancia *s* según cualquiera de las fórmulas (12). Como antes dijimos en las reglas generales para la colocación del entramado metálico, la distancia que se recomienda como satisfactoria, entre los estribos es la mitad de la altura de la viga, aunque por numerosas pruebas efectuadas se ha llegado a determinar que los mejores resultados se obtendrán cuando esa distancia sea igual a un tercio de la altura.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

Para mayor comprensión y claridad del uso y empleo de las fórmulas ya determinadas, vamos a estudiar un mismo caso pero visto bajo diferentes aspectos para obtener así, por comparación entre los resultados obtenidos, una idea exacta de la gran importancia que tiene la aplicación conveniente de ellas.

Los problemas que vamos a resolver, son tres:

1º---Determinar el momento resistente de una viga cualquiera dadas sus secciones de hierro y hormigón respectivas y la longitud de su luz;

2º---Determinar los coeficientes de trabajo a la tensión y compresión del hierro y del hormigón, dadas sus secciones respectivas, la longitud de la luz de la viga que se estudia y las cargas que sobre ella actúan;

3º---Determinar las secciones necesarias de hierro y de hormigón de una viga cualquiera, cuya longitud, cargas y disposición de los apoyos se conoce.

Nota.---En la resolución de los tres problemas mencionados hemos dado al coeficiente n, que representa la relación entre los coeficientes de elasticidad del hierro y del hormigón, un valor 15 por ser el que generalmente se emplea en la práctica.

PROBLEMA PRIMERO.---La sección transversal de una viga rectangular de hormigón armado es de 20 cm. de ancho por 38 cm. de altura y la longitud de su luz es igual a 6 metros. Tiene un refuerzo a la tracción de 4 varillas de 1|2 pulgada, cuyos centros se encuentra a una distancia de 3 cm. de la cara inferior de la viga; asumiendo unos coeficientes de trabajo a la tensión y a la compresión, al hierro y al hormigón, respectivamente de 1100 Kg.|cm^2 y 50 Kg.|cm^2, cuál será el momento resistente de esta viga?

En primer lugar encontraremos la relación existente entre el área efectiva del hierro y la del hormigón, o sea el valor p:

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{4 \times 1.27}{20 \times 35} = 0.0072$$

El valor 1.27 representa el área de cada varilla de 1|2 pulgada, al que se lo puede encontrar en la tabla que damos al final.

Luego se buscará la relación que existe entre la distancia a que se encuentra la fibra más afectada por la compresión, de la fibra neutra, y la altura de la viga; este valor estará representado por k; luego:

$$k=\sqrt{2pn+(pn)^2}-pn=\sqrt{2x0.0072 \times 15\ (0.0072 \times 15)^2}-0.0072 \times 15;\ k=0.369$$

Conocido este valor encontraremos el valor de la relación entre el brazo de palanca del par de fuerzas que resisten al esfuerzo flector y la altura de la viga, o sea el valor de j: tendremos que:

$$j=1-\frac{k}{3}=1-\frac{0.369}{3}=0.877$$

Y, finalmente aplicando las fórmulas (4) y (5), que nos dan los valores de los momentos resistentes para el hierro y el hormigón, tendremos que:

$M_c=1/2 f_c k j b d^2=1/2 \times 50 \times .877 \times 20 \times 35^2=198\ 205$ Kilo-centímetros.

Como dijimos antes, para encontrar el valor encontrado, dado en kilográmetros, habrá que dividir por 100; por lo tanto:

$M_c=1982.05$ Kilográmetros, que representa el valor del momento resistente del hormigón.

Para el hierro, tendríamos:

$M_s=A_s f_s j d=5.08 \times 1100 \times .877 \times 35=171\ 524$ Kilocent. $=1\ 715.24$ Kilográmetros.

De los valores encontrados podemos sacar en consecuencia que a la pieza le falta una cierta sección de refuerzo y por lo tanto, el momento resistente del hierro será el que dará el de la viga, para evitar que ella se rompa por tensión; por lo tanto el momento resistente de la viga, será: 1 715.24 Kilográmetros.

Segundo caso.—Empleando la misma viga estudiada en el caso anterior, encontrar los valores de los coeficientes de trabajo a la tracción en el hierro (f_s) y a la compresión en el hormigón (f_c) si le aplicamos una carga de 200 Kgs. por metro lineal de luz.

El peso propio de la viga, será:

$$.20 \times .35 \times 1 \times 2500=175 \text{ Kgs./metro lineal}$$

La carga total será entonces: 175+200=375 Kgs./metro lineal.

El momento flector máximo para esta viga está dado por:

$$M=\frac{pl^2}{8}=\frac{375 \times 6^2}{8}=1\ 687.5 \text{ Kilográmetros}$$

En el caso anterior encontramos los siguientes valores:

$$k=0.369$$
$$j=0.877$$

Por lo tanto, siendo: $M_s=A_sf_sjd$, tendremos que:

$$M_s=1\,687.5=\frac{5.08 \times f_s \times .8\,77 \times 35}{100}$$

De donde, despejando el valor de f_s, tendremos:

$$f_s=\frac{100 \times 1\,687.5}{5.08 \times .877 \times 35}=1\,082 \text{ Kg.}|\text{cent}^2$$

Y para el hormigón; siendo:

$$f_c=\frac{kf_s}{n(1-k)}$$, tendremos que:

$$f_c=\frac{.369 \times 1\,082}{15\,[1-.369]}=42.2 \text{ Kg.}|\text{cent.}^2$$

Valor que también se hubiera encontrado empleando la fórmula del momento resistente del hormigón, que dice:

$$M_c=1|2f_ckjbd^2.$$

Como vemos los dos resultados obtenidos en os problemas estudiados están de acuerdo con lo que dijimos al terminar el primer caso, o sea que, no excediéndose el momento flector máximo de la viga del momento resistente del hierro, la pieza podría soportar perfectamente dicho esfuerzo, dentro de sus coeficientes de trabajo para el hierro y el hormigón.

TERCER CASO,---Determinar las secciones de hierro y de hormigón que debe tener una viga de 6 metros de luz, apoyada por sus dos extremos, con una carga uniformemente repartida de 200 Kg.|metro lineal.

Empleando los mismos valores que en los casos anteriores, o sea: 2 500 Kg. de peso por metro cúbico de hormigón, 1100 Kg| cmt,^{2} como coeficiente de trabajo del hierro y 50 Kg.|cmt.^{2} como coeficiente de trabajo del hormigón, obtendremos los resultados que a continuación se indican.

Para la resolución de este problema lo primero que es necesario hacer es asumir a la viga una sección determinada, para poder calcular el peso propio de ella; supongamos pues que ella tenga un espesor de 20 cent. y una altura total de 33 cmt.; si descontamos de la altura total 3 cmt. que representarán la capa de hormigón que debe ir bajo el refuerzo, tendremos que el peso por metro lineal de viga, será:

$$.20 \times .30 \times 1 \times 2500 = 150 \text{ Kilogramos}$$

Por lo tanto, el peso total por metro lineal de viga, será: $150+200=350$ Kgs.

Y el valor del momento flector máximo:

$$M = \frac{pl^2}{8} = \frac{350 \times 6^2}{8} = 1\,575 \text{ Kilográmetros}$$

Para encontrar el área de hormigón emplearemos la fórmula siguiente:

$$M_c = \frac{fckjbd^2}{200}$$

Pero en dicha fórmula los valores de *k* y de *j* son desconocidos y dependen el uno del otro, pues la fórmula que da el valor de *j*, es: $j=1-k/3$.

Habrá pues primero que determinar el valor de *k* y sabemos que está dado por: $k=\dfrac{n}{n+r}$

Y, sabiendo que *n* es igual a 15 según dijimos al principio y que *r* representa la relación entre los coeficientes de trabajo del hierro y del hormigón, tendremos que:

$$r = \frac{1100}{50} = 22 \text{ ; por lo tanto, } k = \frac{15}{15+22} = .405$$

Con este valor encontraremos el de *j*, cuya fórmula hemos dicho que es:

$$j = 1 - \frac{k}{3} = 1 - \frac{.405}{3} = .865$$

Substituyendo estos valores en la fórmula que nos dá el valor de M_c, tendremos que:

$$M_c = 1575 = \frac{50 \times .405 \times .865 \times bd^2}{200} \text{ ; de donde:}$$

$$bd^2 = \frac{1\,575 \times 200}{50 \times .405 \times .865} = 17\,979$$

El valor encontrado representa el producto del espesor de la viga por el cuadrado de su altura efectiva y sabiendo que la viga rectangular mejor proporcionada es aquella en que b es igual a 1/2 o 3/4: de d; tendremos que:

$$.7d \times d^2 = 17\,979$$

De donde:

$$d^3 = \frac{17\,979}{0.7} = 25684$$

Y, por lo tanto:

$$d = \sqrt[3]{25684} = 29.5 \text{ centímetros.}$$

Altura que podemos considerar satisfactoria, porque restándola de la altura total que asumimos al principio del problema, nos dará un espesor para la capa de hormigón que cubre la parte inferior de la armadura, de 3,5 centímetros.

No siempre corresponde el valor que se obtiene para la sección de la viga con el que se asumió al principio, para poder calcular su peso aproximado; en ese caso se debe volver a calcular la viga con la sección obtenida, obteniéndose economía de material si el valor asumido fue mayor que el necesario, o aumento de él en caso contrario.

Una vez determinada la sección del hormigón como se ha visto, se puede determinar la del hierro mediante la siguiente fórmula:

$$M_s = 1\,575 = \frac{A_s f_s j d}{100} = \frac{A_s \times 1100 \times .865 \times 29.5}{100}$$

De donde despejando el valor de A_s, tendremos:

$$A_s = \frac{1575 \times 100}{1100 \times .865 \times 29.5} = 5.61 \text{ centímetros}^2$$

Para obtener esta sección de hierro necesitaríamos según la tabla que se dá al final, de dimensiones y pesos de hierros, 3 varillas de 1/2 pulgada y 1 de 5/8, que nos darían un área total de 5,80 cent.^{2} con un pequeño exceso.

A continuación damos tres tablas que son de gran importancia para la resolución de problemas como los que hemos estudiado; y son: la primera una tabla que dá las secciones de varillas de hierro corrientemente usadas, sus pesos por unidad de longitud y su sección; la segunda y tercera son tablas que convenientemente usadas y familiarizándose con ellas facilitan enormemente los cálculos; la segunda se emplea cuando se desea calcular las secciones de hierro y hormigón, necesarias, para una viga determinada [como en el problema tercero] y la tercera para revisión [como en los problemas primero y segundo].

Nota importante.—Es necesario advertir que cuando se emplee el coeficiente K tal y conforme se da en la tabla 2, se obtienen los valores de los momentos resistentes en Kilocentímetros, para obtenerlos directamente en Kilográmetros hay que dividir por 100 a dicho coeficiente.

TABLA PRIMERA

Diámetros de varillas, secciones y pesos.

Diámetros		Pesos Kg. x metro	Pesos Lbs. x metro	Secciones mm.²
Pulgadas	mm.			
1/4	6.35	0.403	0.89	31
3/8	9.53	0.907	1.99	71
1/2	12.70	1.600	3.52	127
5/8	15.90	2.520	5.54	198
3/4	19.10	3.630	7.98	287
1	25.40	6.450	14.19	515

TABLAS PARA CALCULAR VIGAS RECTANGULARES DE HORMIGON ARMADO

TABLA SEGUNDA Valores de p, j, k i K.

n=12				fs	fc	n=15			
k	j	p	K	Kg/cm²	Kg/cm²	k	j	p	K
0.284	0.905	0.0047	3.83	900	30	0.333	0.889	0.0056	4.48
0.347	0.885	0.0077	6.13		40	0.400	0.867	0.0089	6.94
0.400	0.867	0.0111	8.66		50	0.454	0.849	0.0126	9.63
0.266	0.911	0.0040	3.64	1000	30	0.312	0.896	0.0047	4.21
0.324	0.893	0.0065	5.80		40	0.374	0.876	0.0075	6.57
0.376	0.875	0.0094	8.23		50	0.406	0.865	0.0083	8.04
0.248	0.917	0.0034	3.43	1100	30	0.292	0.903	0.0040	3.97
0.302	0.900	0.0055	5.45		40	0.352	0.883	0.0064	6.22
0.353	0.882	0.0080	7.76		50	0.405	0.865	0.0092	8.75
0.231	0.923	0.0029	3.21	1200	30	0.271	0.910	0.0034	3.71
0.286	0.904	0.0048	5.21		40	0.333	0.889	0.0056	5.98
0.334	0.889	0.0070	7.47		50	0.384	0.872	0.0080	8.37

$k=\frac{n}{n+r}$ $j=1-\frac{k}{3}$ $p=\frac{n}{2r(n+r)}$ K=1 2fckj ó pfsj

TABLA TERCERA

Valores de k i j

p	n=12		n=15		p	n=12		n=15	
	k	j	k	j		k	j	k	j
0,0020	0,196	0,935	0,217	0,928	0,0076	0,345	0,885	0,376	0,875
0,0022	0,204	0,932	0,222	0,926	0,0078	0,349	0,884	0,380	0,873
0,0024	0,212	0,929	0,231	0,923	0,0080	0,353	0,882	0,384	0,872
0,0026	0,220	0,927	0,240	0,920	0,0082	0,356	0,881	0,387	0,871
0,0028	0,227	0,924	0,248	0,917	0,0084	0,360	0,880	0,390	0,870
0,0030	0,235	0,922	0,258	0,914	0,0086	0,363	0,879	0,394	0,869
0,0032	0,241	0,920	0,263	0,912	0,0088	0,366	0,878	0,398	0,867
0,0034	0,248	0,917	0,271	0,910	0,0090	0,370	0,877	0,402	0,866
0,0036	0,254	0,915	6,277	0,908	0,0092	0,373	0,876	0,405	0,865
0,0038	0,260	0,913	0,284	0,905	0,0094	0,376	0,875	0,407	0,864
0,0040	0,266	0,911	0,292	0,903	0,0096	0,379	0,874	0,411	0,863
0,0042	0,270	0,910	0,297	0,901	0,0098	0,381	0,873	0,414	0,862
0,0044	0,276	0,908	0,303	0,899	0,0100	0,385	0,872	0,418	0,861
0,0046	0,281	0,906	0,309	0,897	0,0102	0,387	0,871	0,420	0,860
0,0048	0,286	0,904	0,315	0,895	0,0104	0,391	0,870	0,423	0,859
0,0050	0,291	0,903	0,320	0,893	0,0106	0,394	0,869	0,426	0,858
0,0052	0,295	0,901	0,324	0,892	0,0108	0,396	0,868	0,429	0,857
0,0054	0,300	0,900	0,329	0,891	0,0110	0,398	0,867	0,432	0,856
0,0056	0,304	0,899	0,333	0,889	0,0112	0,402	0,866	0,434	0,855
0,0058	0,309	0,897	0,337	0,888	0,0114	0,404	0,865	0,437	0,854
0,0060	0,314	0,895	0,344	0,885	0,0116	0,407	0,864	0,440	0,853
0,0062	0,317	0,894	0,348	0,884	0,0118	0,410	0,863	0,443	0,852
0,0064	0,322	0,893	0,352	0,883	0,0120	0,412	0,863	0,446	0,851
0,0066	0,325	0,892	0,356	0,881	0,0122	0,415	0,862	0,448	0,851
0,0068	0,330	0,890	0,360	0,880	0,0124	0,417	0,861	0,451	0,850
0,0070	0,334	0,889	0,365	0,878	0,0126	0,419	0,860	0,454	0,849
0,0072	0,338	0,887	0,369	0,877	0,0128	0,422	0,859	0,457	0,848
0,0074	0,342	0,886	0,372	0,876	0,0130	0,424	0,859	0,459	0,847

$$k = \sqrt{2pn + (pn)^2} - pn$$

$$j = 1 - \frac{k}{3}$$