ARQUITECTURA

Apuntes Numéricos

SEGUNDA PARTE

(La primera parte de este artículo se publicó en el No. 4 de 1.984)

Arq. Julio Romo-Leroux P.*

Sembrada la inquietud respecto de la investigación sobre el comportamiento numérico de los cuadrados de los números de 2, 3 y 4 cifras terminados en 5, y explicado el procedimiento mecánico para obtener el resultado; he sentido la satisfacción de la felicitación sincera y generosa a la vez, de quienes han visto en dicha obra un estudio paciente y minucioso a la par que interesante y hay quienes ven en él, un mensaje que invita a una reflexión sobre los riesgos de la automatización.

Alentado por los buenos comentarios y por la invitación a continuar la búsqueda que resuelva los números restantes, empecé a revisar la obra realizada y a observar con detenimiento las "tablas" de los números y sus cuadrados, para obtener conclusiones aparentemente elementales pero que servirán para "trabajar" los números restantes:

* Profesor Fac. de Arquitectura y Urbanismo
Universidad de Guayaquil.

1.- Considerando todas las tablas como un muestreo, podría sacar como conclusión que los cuadrados de todos los números terminados en 5, terminan a su vez en 25.

2.- Que los números de 2, 3 y 4 cifras constituyen el resultado de una media aritmética entre otros dos que en buena parte de los casos, están incluídos dentro de las tablas.

3.- Que faltan todavía 880 números de 3 y 4 cifras terminados en 5, a los cuales no se los ha encasillado en un procedimiento determinado para encontrar su respectivo cuadrado.

Teniendo presente que para encontrar el cuadrado de todos los números de dos cifras terminados en 5, el procedimiento consistía en multiplicar entre sí los dígitos que representan las decenas inmediata anterior y posterior, escribiendo a continuación 25:

$$(65)^2 \longrightarrow 6 \times 7 .25 \longrightarrow 4225$$

de igual manera para los números de tres cifras entre 105 y 305:

$$(185)^2 \longrightarrow 18 \times 19 .25 \longrightarrow 34225$$

con la excepción de que para facilidad de cálculo se procede de la siguiente manera:

$$(185)^2 \longrightarrow (18)^2 + 18 .25$$

Se observa que se cumple la conclusión segunda:

$$65 = \frac{60 + 70}{2} \quad \text{(Media Aritmética)}$$

$$185 = \frac{180 + 190}{2} \quad \text{(Media Aritmética)}$$

y que precisamente se utilizan dichos términos (los de la media aritmética, para encontrar el cuadrado de aquellos números, por lo que procedí a aplicar este criterio para la sucesión numérica de tres cifras entre números que van de 50 en 50, con lo cual se encontró ciertos números terminados en 5 que no están contenidos en las tablas anteriores:

$$\frac{100 + 150}{2} = 125$$

$$\frac{150 + 200}{2} = 175$$

—.—.—.—.—

—.—.—.—.—

—.—.—.—.—

$$\frac{450 + 500}{2} = 475$$

$$\frac{500 + 550}{2} = 525$$

Es importante hacer notar que los números así obtenidos, aparte de terminar en 5 y seguir una sucesión de 50 en 50, sus dos últimas cifras son alternadamente 25 y 75, lo cual servirá para identificar aquellos números de tres cifras cuyos cuadrados se los obtiene mediante un procedimiento específico que lo he denominado, el método de "la media aritmética".

A continuación presento la tabla de los cuadrados respectivos:

Número	Cuadrado
125	15.625
175	30.625
225	50.625
275	75.625
325	105.625
375	140.625

De los números expuestos en la tabla, los cuatro primeros forman parte de otra tabla anterior por lo que las observaciones de esta última se referirán a los cuadrados de los números a partir del 325.

425	180.625
475	225.625
525	275.625
575	330.625
625	390.625
675	455.625
725	525.625
775	600.625
825	680.625
875	765.625
925	855.625
975	950.625

1.- Todos los cuadrados son de seis cifras.

2.- Todos terminan en 625.

3.- Los tres primeros dígitos del resultado corresponden al producto (en centenas de mil) de las dos cantidades que forman la media aritmética. En consecuencia de ello, la obtención del cuadrado será una operación muy sencilla:

$$(325)^2 = 300 \times 350 + 625 = 105.000 + 625 = 105.625$$

$$\therefore\ (475)^2 = 450 \times 500 + 625 = 225.000 + 625 = 225.625$$

de la cual podemos plantear el siguiente mecanismo:

$$(625)^2 \longrightarrow 6 \times 65\ .625 \longrightarrow 390.625$$

$$(775)^2 \longrightarrow 75 \times 8\ .625 \longrightarrow 600.625$$

$$(925)^2 \longrightarrow 9 \times 95\ .625 \longrightarrow 855.625$$

Donde se observa que en la multiplicación de las cantidades que forman la media aritmética, se ha prescindido de los ceros y consecuentemente al resultado obtenido, se le añadirá a continuación 625.

En lo que respecta a los números de cuatro cifras, se seguirá un procedimiento similar al caso anterior, ya que así mismo, son el resultado de una media aritmética entre las cantidades que están en sucesión numérica de 500 en 500 a partir de 1005:

$$\frac{1005 + 1505}{2} = 1255$$

$$\frac{1505 + 2005}{2} = 1755$$

$$\frac{2005 + 2505}{2} = 2255$$

—.——.—.—

—.——.—.—

—.——.—.—

$$\frac{8505 + 9005}{2} = 8755$$

$$\frac{9005 + 9505}{2} = 9255$$

$$\frac{9505 + 10.005}{2} = 9755$$

Todos los números así encontrados terminan en 55 y el segundo dígito es 2 ó 7, estas dos características servirán para identificar al número y aplicarle el método de la media aritmética.

La tabla de los cuadrados de dichos números es la siguiente:

NUMERO	CUADRADO
1255	1575025
1755	3080025
2255	5085025
2755	7590025
3255	10595025
3755	14100025

De la observación de los resultados se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1.- Todos los números terminan en 025.

4255	18105025
4755	22610025
5255	27615025
5755	33120025
6255	39125025
6755	45630025
7255	52635025
7755	60140025
8255	68145025
8755	76650025
9255	85655025
9755	95160025

2.- Los cuatro primeros resultados (para los números entre 1255 y 2755) son de 7 dígitos y a partir del 3255, los cuadrados son cantidades de 8 dígitos.

3.- Los cuadrados de los números cuyo segundo dígito es el 2, tienen un terminal de 4 cifras: 5025 y los cuadrados de aquellos números cuyo segundo dígito es el 7, su terminal de 4 cifras es: 0025.

4.- Para los cuadrados de los números cuyo segundo dígito es el 2, las primeras cifras del resultado se forman de la siguiente manera:

$$10 \times 15 + 6 + 1 = 157$$

$$20 \times 25 + 6 + 2 = 508$$

$$50 \times 55 + 6 + 5 = 2761$$

$$60 \times 65 + 6 + 6 = 3912$$

$$80 \times 85 + 6 + 8 = 6814$$

$$90 \times 95 + 6 + 9 = 8565$$

En los cuales, los factores están formados por las dos primeras cifras de los números que integran la media aritmética y los dos sumados son: el 6 como cantidad fija y el otro es el primer dígito del número. El 6 será el número clave para los cuadrados de los números cuyo segundo dígito es el 2; en consecuencia tendremos que el procedimiento será como sigue:

$$[1255]^2 \longrightarrow 10 \times 15 + 6 + 1 \bullet 5025 = 1575025$$

$$[3255]^2 \longrightarrow 30 \times 35 + 6 + 3 \bullet 5025 = 10595025$$

$$[6255]^2 \longrightarrow 60 \times 65 + 6 + 6 \bullet 5025 = 39125025$$

$$[9255]^2 \longrightarrow 90 \times 95 + 6 + 9 \bullet 5025 = 85655025$$

5.- Para los cuadrados de los números cuyo segundo dígito es el 7, las primeras cifras del resultado se forman de la siguiente manera:

$15 \times 20 + 8 = 308$

$25 \times 30 + 9 = 759$

$55 \times 60 + 12 = 3312$

$65 \times 70 + 13 = 4563$

$85 \times 90 + 15 = 7665$

$95 \times 100 + 16 = 9516$

En los cuales, los factores están formados por las dos primeras cifras de los números que integran la media aritmética y la cantidad que se aumenta, es el resultado de la suma de los dos primeros dígitos del número.

En consecuencia tendremos, que el procedimiento para la obtención del cuadrado, será como sigue:

$$[1755]^2 \longrightarrow 15 \times 20 + \overbrace{8}^{1 + 7} \bullet 0025 = 3080025$$

$$[3755]^2 \longrightarrow 35 \times 40 + \overbrace{10}^{3 + 7} \bullet 0025 = 14100025$$

$$[7755]^2 \longrightarrow 75 \times 80 + \overline{14} \bullet \underline{0025} = 60140025 \qquad (7+7)$$

$$[9755]^2 \longrightarrow 95 \times 100 + \overline{16} \bullet \underline{0025} = 95160025 \qquad (9+7)$$

Con este nuevo procedimiento se ha logrado obtener los cuadrados de 32 números terminados en 5, quedando todavía 848 números por determinar. Particularmente, entre los números de 3 cifras quedan pendientes de resolver 42.

Debo dejar precisado, que los números cuyos cuadrados se han podido obtener fácilmente por el método de la media aritmética, son aquellos para los cuales el producto entre los factores establecidos, es de muy sencillo cálculo mental por lo que la escritura del valor del cuadrado del número correspondiente no pierde agilidad.

Para el cálculo de los cuadrados de los restantes números de tres cifras, el método más sencillo será aquel que fue explicado en la primera publicación, lo cual conlleva la necesidad de memorizar los cuadrados de los números de dos cifras superiores a 30, siendo así, quedarían resueltos todos los números de tres cifras terminados en 5.

En todo caso debo expresar, que en un intento de encontrar un procedimiento para obtener el cuadrado de dichos números, descubrí la fórmula para calcular el producto entre dos números de tres cifras terminados en 5 y equidistantes del "centro".

Dicho "Centro" será aquel número de tres cifras terminado en 55 (355, 455, 555, etc.) y cuyos cuadrados están contenidos en la tabla respectiva. Tomando como ejemplo los números comprendidos entre el 300 y 400, tenemos la siguiente lista de factores con sus respectivos resultados:

315 × 395 = 124425
325 × 385 = 125125
335 × 375 = 125625
345 × 365 = 125925

Los factores planteados son equidistantes del número central 355, los mismos que se los podría reconocer más fácilmente, si considerando sólo las dos primeras cifras de los números vemos que siguen la misma ley de los números de dos cifras equidistantes de los extremos y por lo tanto el procedimiento mecánico es aproximadamente el mismo:

EXTREMOS	FACTORES	MECANISMO	RESULTADO
30 y 40	315 × 395	31 × 39 + 35 • 25	124425
40 y 50	425 × 485	42 × 48 + 45 • 25	206125
50 y 60	535 × 575	53 × 57 + 55 • 25	307625
60 y 70	645 × 665	64 × 66 + 65 • 25	428925
80 y 90	815 × 895	81 × 89 + 85 • 25	729425
90 y 100	925 × 985	92 × 98 + 95 • 25	911125

Como se observa, el mecanismo consiste en multiplicar los términos equidistantes de los extremos (subrayados en la columna de factores), según el método ya explicado en la publicación anterior:

52 × 58 ⟶ 5 × 6 • 2 × 8 = 3016

, luego se sumará el

término central, escribiendo a continuación 25.

Ejemplos:

$$435 \times 475 \rightarrow 43 \times 47 \rightarrow 4 \times 5 \bullet 3 \times 7 \rightarrow 2021 + 45 \bullet 25 = 206625$$

$$525 \times 585 \rightarrow 52 \times 58 \rightarrow 5 \times 6 \bullet 2 \times 8 \rightarrow 3016 + 55 \bullet 25 = 307125$$

$$715 \times 795 \rightarrow 71 \times 79 \rightarrow 5609 + 75 \bullet 25 = 568425$$

$$845 \times 865 \rightarrow 84 \times 86 + 85 \bullet 25 = 730925$$

En cuanto a los números de cuatro cifras cuyos cuadrados faltan por determinar, revisando el método de la "Media Aritmética" considero interesante presentar la tabla de los cuadrados de números entre 1055 a 3055, en una sucesión de 100 en 100 y tomando en cuenta que:

$$1255 = \frac{1205 + 1305}{2}$$

$$1855 = \frac{1805 + 1905}{2}$$

$$2355 = \frac{2305 + 2405}{2}$$

$$2855 = \frac{2805 + 2905}{2}$$

Es decir, que se trata de números que constituyen el resultado de una media aritmética entre otros dos terminados en 5 y que se encuentran contenidos en las tablas anteriores.

Los números obtenidos también terminan en 55 y el cálculo de sus cuadrados resulta un proceso sencillo, si se tiene el dominio de la multiplicación entre dos números consecutivos y de la facilidad de cálculo entre la suma de dos cantidades.

Los números cuyos cuadrados se trata de obtener, están en una secuencia de 100 en 100, lo que quiere decir que sus dos primeros dígitos forman una sucesión de números consecutivos desde el 10 hasta el 30, que es la característica que le proporciona agilidad al procedimiento.

NUMERO	CUADRADO
1055	1113025
1155	1334025
1255	1575025
1355	1836025
1455	2117025
1555	2418025
1655	2739025
1755	3080025
1855	3441025
1955	3822025
2055	4223025
2155	4644025
2255	5035025
2355	5546025
2455	6027025
2555	6528025
2655	3049025

De la observación de los resultados podemos sacar las siguientes conclusiones:

1.- Todos los cuadrados son números de siete cifras.

2.- Todos terminan en 025.

3.- Las tres primeras cifras del resultado, se obtienen multiplicando los dos números consecutivos más el primer dígito del número.

4.- El cuarto y quinto dígito del resultado es producto de la suma del par central del número más 25.

NOTA ACLARATORIA: Si la operación explicada en el numeral 4, da una cantidad igual o mayor

2755	7590025
2855	8151025
2955	8732025
3055	9333025

que 100, la unidad que representa las centenas, se "integrará" al resultado obtenido según lo expresado en el numeral 3; esto sucede con los números 1755, 1855 y 1955, a partir de los cuales y hasta el 2655 se sumará 2 en vez de 1; cosa similar sucede a partir de 2755 en que se sumará 3 en vez de 2.

Por otra parte, algunos números tales como: 1255, 1755, 2255 y 2755 ya están considerados en la tabla inmediata anterior.

A continuación expongo algunos ejemplos que "grafican" el mecanismo mediante el cual se obtiene el resultado:

$$[1255]^2 \longrightarrow \underbrace{12 \times 13 + 1}_{(12^2 + 12)} \bullet 25 + 25 \bullet 25 \longrightarrow 157 \bullet 50 \bullet 25 = 1'575.025$$

$$[1655]^2 \longrightarrow \underbrace{16 \times 17 + 1}_{(16^2 + 16)} \bullet 65 + 25 \bullet 25 \longrightarrow 273 \bullet 90 \bullet 25 = 2'739.025$$

$$[1755]^2 \longrightarrow 17 \times 18 + 2 \bullet \underbrace{75 + 25}_{100} \bullet 25 \longrightarrow 308 \bullet 00 \bullet 25 = 3'080.025$$

$$[1955]^2 \longrightarrow 19 \times 20 + 2 \bullet \underbrace{95 + 25}_{1\ 20} \bullet 25 \longrightarrow 382 \bullet 20 \bullet 25 = 3'822.025$$

$$[2355]^2 \longrightarrow 23 \times 24 + 2 \bullet 35 + 25 \bullet 25 \longrightarrow 554 \bullet 60 \bullet 25 =$$

$$5'546.02$$

$$[2755]^2 \longrightarrow 27 \times 28 + 3 \bullet 75 + 25 \bullet 25 \longrightarrow 759 \bullet 00 \bullet 25 =$$

$$1\ 00 \qquad 7'590.02$$

$$[2955]^2 \longrightarrow 29 \times 30 + 3 \bullet 95 + 25 \bullet 25 \longrightarrow 873 \bullet 20 \bullet 25 =$$

$$1\ 20 \qquad 8'732.02$$

Probablemente, el mecanismo explicado ofrezca algunas dificultades por la necesidad de retener en la memoria algunos resultados parciales, por lo que es recomendable la escritura del número como también la de alguna parte del proceso, en beneficio de un correcto resultado final. En ese sentido, un procedimiento alternativo que facilite mucho el método, podría ser el siguiente:

$$[2455]\ \xrightarrow{2}\ [24]^2 + 24 \longrightarrow 600$$

$$\longrightarrow 245$$

$$\begin{array}{r} 25 \bullet 25 \\ \hline 60270 \bullet 25 \end{array} = 6'027.025$$

$$[2855]^2 \longrightarrow [28]^2 + 28 \longrightarrow 812$$
$$\longrightarrow 285$$
$$25 \bullet 25$$
$$\overline{81510 \bullet 25} = 8'151.025$$

$$[3055]^2 \longrightarrow [30]^2 + 30 \longrightarrow 930$$
$$\longrightarrow 305$$
$$25 \bullet 25$$
$$\overline{93330 \bullet 25} = 9'333.025$$

No podría dar por terminada esta segunda parte de la obra "Apuntes Numéricos", sin proporcionar alguna idea de como encontrar fácilmente los cuadrados de los restantes números de tres cifras terminados en 5, ya que la condición de memorizar los cuadrados de los números de dos cifras superiores a 30, puede resultar una tarea difícil, en razón de que las cantidades resultantes son cada vez mayores y la capacidad individual de memoria es muy variable, pero ...recordando lo que todos aprendimos en Algebra sobre el cuadrado de la suma de dos términos:

$$[A + B]^2 = A^2 + 2 \times A \times B + B^2$$

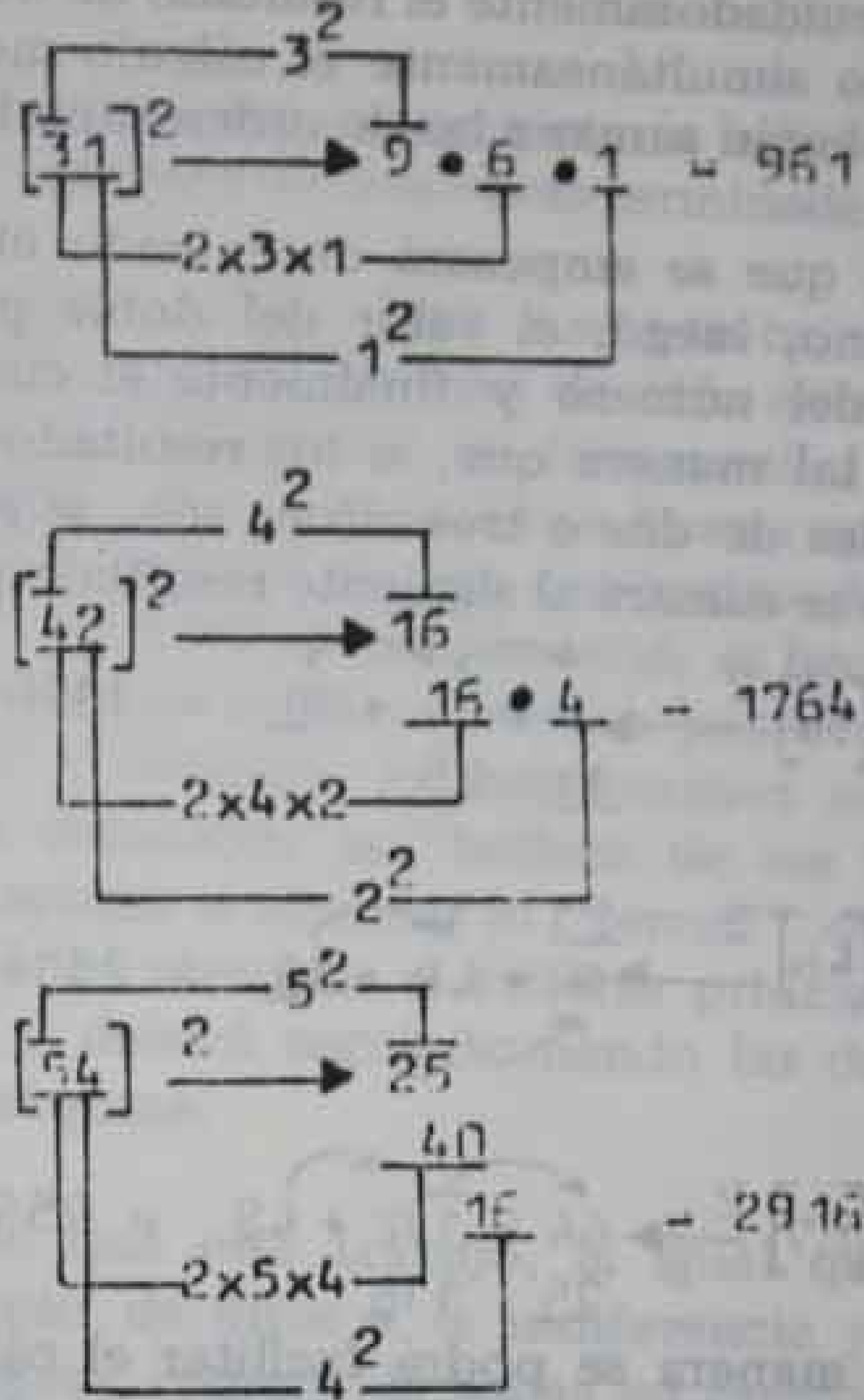
Lo que aplicado con los números, se procedería de la siguiente manera:

$$[31]^2 = [30 + 1]^2 = [30]^2 + 2 \times 30 \times 1 + 1^2 = 900 + 60 + 1 = 961$$

$$[42]^2 = [40 + 2]^2 = 1.600 + 160 + 4 = 1.764$$

$$[54]^2 = [50 + 4]^2 = 2.500 + 400 + 16 = 2.916$$

Cuyo proceso mecánico podría "graficarse" de la siguiente manera:



Procedimiento que se agilitará enormemente, con el dominio del aspecto algebraico del método y la capacidad de cálculo mental, particularmente cuando el resultado, tanto del cuadrado del segundo término cuanto del doble producto entre ambos términos, son cantidades que se deberán integrar a la cifra de orden superior; esta circunstancia me lleva a considerar la factibilidad de mecanizar aún más el proceso, planteando una guía para escribir el resultado, a través de los siguientes pasos:

1.- Escribir el número cuyo cuadrado se va a obtener.

2.- Realizar una rápida inspección visual de los términos, con la finalidad de establecer las características del resultado.

3.- Escribir cuidadosamente el resultado de derecha a izquierda, realizando simultáneamente el cálculo mental, de las cifras que se deberán sumar a las de orden superior.

Es decir, que se empezará obteniendo el cuadrado del segundo término, luego, el valor del doble producto entre los dos dígitos del número y finalmente el cuadrado del primer término, de tal manera que, si los resultados parciales, producen cantidades de dos o tres cifras, sólo se escribirá la cifra final y el resto se sumará al siguiente resultado parcial:

$$[34]^2 \longrightarrow 9 \bullet 24 \bullet 1\underline{6} = 1156$$
$$\underline{11} \quad 2\underline{5}$$

$$[46]^2 \longrightarrow \underset{}{\overset{\underline{21}}{16}} \bullet 48 \bullet 3\underline{6} = 2116$$
$$5\underline{1}$$

$$[87]^2 \longrightarrow 64 \bullet 112 \bullet 4\underline{9} = 7569$$
$$\underline{75} \quad 11\underline{6}$$

De esta manera se podrá facilitar el cálculo del cuadrado de un número de tres cifras terminado en 5 y mayor que 300, utilizando el mismo procedimiento explicado en la publicación anterior:

$$[315]^2 \longrightarrow \overset{31^2}{\overline{961}} + \underline{31} \bullet 25 = 99225$$

$$[385]^2 \longrightarrow \overset{38^2}{\overline{1444}} + \underline{38} \bullet 25 = 148225$$

$$[545]^2 \longrightarrow \overset{54^2}{2916}$$
$$\longrightarrow 54 \bullet 25$$
$$2970 \bullet 25 = 297.025$$

$$[635]^2 \longrightarrow \overset{63^2}{\overline{3969}}$$
$$\longrightarrow 63 \bullet 25$$
$$4032 \bullet 25 = 403.225$$

Con este procedimiento se completaría la lista de los cuadrados de todos los números de tres cifras terminados en 5.

Debo aquí, poner punto final a este trabajo, que como ya lo he manifestado, es continuación de otro anterior publicado en la Revista de la Universidad de Guayaquil (1.984, No. 4), ya que el objetivo central no es tanto buscar mecanismos que faciliten el cálculo mental de los cuadrados de los números terminados en 5; el objetivo fundamental, es hacer comprender como puede funcionar nuestro cerebro positivamente, si con nuestra voluntad y esfuerzo lo mantenemos en actividad; la idea esencial, es demostrar la "belleza de los números y las Matemáticas" y ayudar a eliminar el "terror" que se le guarda a este campo de las ciencias; el criterio principal, es advertir que quien toma y deberá seguir tomando las decisiones, es el hombre y no la máquina.

Consciente de que este trabajo, al igual que el anterior, merecerá el aprecio de unos y la indiferencia y desprecio de otros, con el mayor respeto de todas las opiniones y reacciones, solicito muy comedidamente a los primeros, se sirvan hacer un resumen de los procedimientos utilizados, según los grupos numéricos analizados y constatar las similitudes y diferencias existentes, que es un aspecto importante de la obra y cuyo dominio es fundamental, ya que eso facilitará el cálculo y escritura de los cuadrados, sin mayor esfuerzo mental. A los segundos, a quienes tienen opiniones contrarias al valor del trabajo desarrollado, muy respetuosamente les sugiero que hagan conocer públicamente sus trabajos de investigación, con toda seguridad mucho más valiosos que el mío y si no los han realizado todavía... ¡Animo! y a trabajar, pero si no lo hacen ... ¡Silencio! por favor...