Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática en Arquitectura

Teaching-Learning Mathematics in Architecture

Autor:

Arq. Julio Romo-Leroux

Universidad de Guayaquil

jurolepaz@yahoo.com

Fecha Recepción: Julio 1 de 2016 **Fecha Aceptación:** Septiembre 13 de 2016

RESUMEN

La enseñanza de la matemática se constituye en un verdadero problema, cuando el docente no dispone de las herramientas metodológicas adecuadas para potenciar el razonamiento lógico. Para los estudiantes es un "martirio" su aprendizaje, al ser sometidos a sistemas educativos que no han contribuido a propiciar dicho razonamiento. Ello los obliga al recurso memorístico, ausente de un proceso de pensamiento que facilite la comprensión de un tema y guíe la ejecución de un problema. La situación es observable en los diferentes niveles del proceso educativo, pero llega a ser muy preocupante en el nivel universitario, adonde llegan estudiantes con muy escasos conocimientos matemáticos, tanto en calidad como en cantidad, sin haber aprendido a pensar, siendo ésta la causa fundamental del bajo rendimiento académico en general y, particularmente, en el campo matemático. En el proceso formativo de la carrera de Arquitectura, la matemática desempeña un rol tributario, destinado a facilitar la enseñanza-aprendizaje de las asignaturas modeladoras de un perfil profesional con matices técnicos, artísticos y humanísticos, pero, por sobre todo, destinado, fundamentalmente, a contribuir a la consecución de un proceso de pensamiento, potenciador del razonamiento lógico, importante pilar que sustenta al máximo atributo del arquitecto: la creatividad. En consecuencia, es importante utilizar adecuadamente ciertas estrategias metodológicas que faciliten la comprensión de los diversos temas establecidos en los contenidos de las unidades del programa de la materia y una guía metodológica que contribuya al proceso de análisis y síntesis para la resolución de un problema matemático.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, aprender a pensar, pensamiento lógico

ABSTRACT

The teaching of mathematics is a real problem, when the teacher does not have the appropriate methodological tools to enhance logical reasoning. For students, their learning is a "martyrdom", being subjected to educational systems that have not contributed to promote such reasoning. This forces them to the memory resource, absent from a thought process that facilitates the understanding of a subject and guides the execution of a problem. The situation is observable in the different levels of the educational process, but it becomes very worrisome at the university level, where students with very little mathematical knowledge arrive, both in quality and in quantity, without having learned to think, being this the fundamental cause Poor academic performance in general, and particularly in the mathematical field. In the formative process of the career of Architecture, mathematics plays a tributary role, designed to facilitate teaching and learning of the modeling subjects of a professional profile with technical, artistic and humanistic nuances, but, above all, To contribute to the achievement of a process of thought, enhancer of logical reasoning, an important pillar that supports the architect's highest attribute: creativity. Consequently, it is important to use adequately certain methodological strategies that facilitate the understanding of the various topics established in the contents of the units of the program of the subject and a methodological guide that contributes to the process of analysis and synthesis for the resolution of a mathematical problem.

Keywords: teaching, learning, learning to think, logical thinking

La enseñanza de la matemática es conflictiva? ¿Cuán difícil es enseñarla? Su aprendizaje, ¿es un problema sin solución? ¿Cuál es el enigma encubierto en sus contenidos que dificultan su comprensión? Estas y muchas otras preguntas suelen formularse directivos y docentes, en seminarios y convenciones, en reuniones académicas o en sencillos conversatorios y tertulias, en las cuales se plantean y argumentan sobre las causas de la dificultades con que se tropieza en el proceso enseñanza-aprendizaje de la asignatura o disciplina, y se sustentan tesis y teorías sobre cómo facilitar su comprensión y, hasta se llega a lo anecdótico sobre casos extremos de grande y escasa capacidad de aprendizaje, de muy buenas bases cognitivas o de muy escasos conocimientos previos, agravados por errores conceptuales.

La enseñanza de cualquier ciencia requiere de una docencia capacitada, en calidad y cantidad de conocimientos, en facilidad y claridad de expresión para la comunicación de los mismos, dueña de los requisitos pedagógicos y psicológicos básicos, además de un buen manejo de esos atributos, pulidos y perfeccionados en la experiencia. La enseñanza de la matemática requiere de ingeniosidad en el tratamiento de un tema, de imaginación en el planteamiento de un problema y de creatividad en la conducción del proceso de análisis y síntesis en el desarrollo del mismo para llegar a la solución correcta.

El aprendizaje de la matemática depende, en buena medida, de los sistemas y métodos utilizados, de las técnicas y estrategias a emplear, según los contenidos a impartir, para motivar en el estudiante el interés por su conocimiento y dominio, en razón de lo significativo de su temática, el grado de contribución tributaria en el contexto académico y la ejercitación del razonamiento lógico que se practica con cada problema sometido a tratamiento y resolución.

El aprendizaje de dicha materia también depende de cómo sale a relucir la actividad cerebral del lóbulo parietal izquierdo, encargado del procesamiento matemático, donde se encuentra almacenada toda la información que la "memoria intelectual" ha sido capaz de registrar por el largo camino donde transita el estudio y aprendizaje de la ciencia matemática. Según los investigadores, el cerebro está dividido en dos partes o secciones: una de dominio lógico y la otra de dominio psicológico y que corresponden a dos ámbitos: el intelectual y el emocional. Se produce una situación vinculante entre la estructura metodológica que se elabore y utilice para facilitar la comprensión de la materia y la necesidad de potenciar el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, pues su estudio se basa en procesos lógicos.

Podría expresarse, entonces, que un proceso de aprendizaje exitoso va de la mano, no sólo de los dotes de conocimiento y dominio de la materia por parte del profesor, además del manejo de adecuadas estrategias aplicadas a la comunicación de los conocimientos planteados en el micro-currículo, sino de aquello que la neurociencia devela sobre el desarrollo cerebral, y que hace que un estudiante muestre inclinaciones y facilidades de aprendizaje hacia las ciencias exactas (Matemática, Física, Química, Biología, Informática) o acoja el camino de las Ciencias Humanísticas, de la Literatura y el Arte en sus diferentes manifestaciones.

No está de más mencionar, como aspectos influyentes, e incluso determinantes, en cuanto se refiere al desarrollo de las capacidades intelectuales y de aprendizaje, la incidencia que tiene en ello el medio familiar en el cual se desarrolla el ser humano, la calidad de la alimentación desde la lactancia, la cultura de higiene y salud, el crecimiento psico-físico normal y el entorno social inmediato. Todo ello contribuye a una buena formación durante el proceso educativo.

En síntesis, el aprendizaje de los contenidos en los diferentes niveles del proceso formativo (escuela, colegio, universidad), estará directamente relacionado con el grado de solidez, profundidad y metodología con la que se ha ido proporcionando dichos contenidos, lo que incide en el grado de comprensión y, particularmente, de aceptación, de tal manera que, la "cadena cognitiva" se estructure armónicamente en la forma necesaria y suficiente que implique un dominio de la temática tal, que facilite la ejecución de los problemas y de la capacidad de aplicación de los mismos en áreas afines, así como de su desarrollo humano.

Ante este panorama que envuelve a la problemática del proceso de la Enseñanza- Aprendizaje de la Matemática (E. A. M.), ¿cuál es la situación en el nivel universitario? ¿Qué clase de estudiantes ingresan a sus aulas? La cadena cognitiva, ¿tiene una estructura armónica? y, muy especialmente, en ese proceso E. A. M., el docente ¿enseñó a pensar? y el alumno ¿aprendió a pensar?

Cualquier docente universitario con treinta o más años de actividad académica sabe -por experiencia-, que la calidad y cantidad de conocimientos recibidos y aprehendidos en los estadios previos al ingreso a los estudios superiores universitarios, se ha venido deteriorando por muchas razones. Entre las que se tiene "más a la mano" se hallan las siguientes:

1. Constantes cambios metodológicos -a manera de ensayo-, en la enseñanza.
2. Mezcla de especializaciones y revisión, con tendencia a la reducción de contenidos.
3. Escasa preparación cognitiva, en muchos casos pedagógica, de la docencia.
4. Proceso de enseñanza-aprendizaje conectado al modelo conductista.
5. El aprendizaje de Lógica Matemática no ha derivado, por los resultados observables, en un despertar de una forma de pensamiento que propicie en el alumnado una inclinación a observar, reflexionar, analizar, explorar, sintetizar, en definitiva, a pensar.
6. Ausencias de estrategias metodológicas que potencien el razonamiento lógico.
7. Abuso en la utilización de herramientas tecnológicas que facilitan la realización de operaciones y ofrecen respuestas inmediatas. Ello ha producido una especie de "pereza mental" y una muy peligrosa dependencia por la cual, el alumnado no se siente "obligado a pensar".
8. Ausencia de una real integración entre Docencia-Alumno-Padres de Familia.
9. Permisibilidad y falta de control de los padres en el proceso educativo de sus hijos.
10. El espacio laboral reclamado, y conquistado, por egresados de ciencias de la educación con discreta preparación pedagógica y escasa preparación cognitiva.
11. Frecuentes retrasos en el inicio de clases de escuelas y colegios por la estación lluviosa, reparación de aulas y falta de equipamiento, así

como las suspensiones de actividades por reclamaciones gremiales. (Romo-Leroux, 2012).

Estas y otras razones fueron las causas principales del deterioro de la educación en las instancias previas al ingreso a los estudios universitarios. Mientras tanto, ¿qué estaba sucediendo en la Universidad ecuatoriana pública y privada, pero, con mayor incidencia en las instituciones públicas?

La abolición de los exámenes de ingreso, un reclamo conseguido por la F.E.S.E. para permitir el "libre ingreso" a las aulas universitarias, por el derecho adquirido -muy discutible, por cierto-, al obtener el título de Bachiller de la República. Valga apuntar que dichos exámenes sólo eran una prueba, muy relativa, de conocimientos, carentes de consideraciones de aptitud y vocación.

Como consecuencia, la reglamentación general de ingreso a la Universidad permitía la admisión a las diferentes unidades académicas, de estudiantes con diferentes conocimientos especializados del bachillerato, lo cual provocó un verdadero derrumbe académico.

¿Cuál es, entonces, el impacto que en particular se ha venido produciendo, en las facultades de Arquitectura? Toda la problemática socio-educativa antes descrita trajo serias consecuencias a las mismas y, en coherencia con ello, han causado un impacto muy negativo en el proceso formativo del profesional de la Arquitectura, lo cual se aprecia en:

1. Bajo nivel cualitativo y cuantitativo sobre contenidos de las ciencias matemáticas en los bachilleres.
2. Gran dificultad para emprender un proceso de enseñanza-aprendizaje matemático.
3. Gran heterogeneidad en el nivel cognitivo de los ingresantes.
4. Desconocimiento de aptitudes propias.
5. Actitud receptiva y sin razonamiento del alumnado.
6. Deserción de los estudios de Arquitectura.
7. Repetición de matrícula por pérdida del ciclo.
8. Desmotivación por el estudio de la asignatura. (Romo-Leroux, 2012)

(Asamblea Nacional del Ecuador, 1992-1993) Debe dejarse claro que el problema de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Arquitectura, es tan sólo una de las aristas de un problema mayor que subyace dentro del gran contexto educativo -un sistema complejo compuesto por profesor-alumno-familia- sociedad-autoridades educativas-asignaciones presupuestarias-reglamentación sobre la admisión de bachilleres-diseño curricular-. El autor sostiene que en la debida articulación y coordinación entre los actores mencionados, está la solución del problema educativo del país.

Ahora bien, al focalizar la situación en las instituciones educativas de la cadena básico- medio-superior, debemos enfatizarse en que si no se puede lograr un mejoramiento sustancial en el proceso educativo primario y secundario, que permita una formación de egreso aceptable para el ingreso a la universidad y, sí esta no promueve e incentiva la investigación, las becas de estudio, los cursos de cuarto nivel, dedicados, entre otros asuntos, para cultivar y desarrollar en el docente estrategias metodológicas que guien el desarrollo del pensamiento -enseñando a pensar para que el alumno adquiera la competencia de saber pensar, abriéndose con ello la oportunidad de mejores desempeños y resultados-, el nivel formativo de los profesionales no rebasará la mediocridad.

Más allá de todo lo anterior, debe tenerse presente la realidad educativa ecuatoriana. A pesar de los esfuerzos gubernamentales por mejorar la educación de la niñez, construyendo locales escolares adecuados y dotándolos de moderna tecnología, preparando a la docencia en actualización de conocimientos y metodología de la enseñanza innovadora, otorgando un bono a familias de extrema pobreza, con el objetivo, entre otros, de que los menores de edad no trabajen y se dediquen a estudiar, el "cambio de época" es una tarea monumental la cual, previo a que se produzca, deberá contar con un cambio actitudinal y de mentalidad de la sociedad en general y de los maestros y padres de familia en particular. De ahí la importancia que tiene para el desarrollo del país una transformación radical del sistema educativo general, desde los cimientos formativos y generadores del pensamiento lógico, de tal manera que se construya un desarrollo permanente del mismo, hasta su aplicación en los niveles universitarios.

Ventajosamente, ya se está enfatizando en el Fortalecimiento de la Reforma Curricular para la Educación General Básica, la cual comprende desde el primero al décimo año, con un eje integrador en el área de matemática, e intenta "desarrollar el pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas de la vida" el cual se apoya, a su vez, en los siguientes ejes del aprendizaje: razonamiento, demostración, comunicación, conexiones y representación.

El documento de Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica plantea tres grandes destrezas a conseguir en los estudiantes: comprensión de conceptos, para que, con el apoyo de una memoria consciente de elementos, leyes y propiedades matemáticas, se dinamice la aplicación de cálculos numéricos y operaciones simples; conocimiento de procesos para facilitar el empleo de modelos matemáticos y la aplicación práctica, como un proceso de reflexión encaminado a la argumentación y demostración de diferentes estrategias de solución o deducción de fórmulas, etc.

Se trata de un nuevo enfoque que, seguramente, potenciará favorablemente el desarrollo del pensamiento matemático, pero siendo de reciente implementación, los frutos a nivel universitario se recogerán luego de entre 6 y 12 años de proceso académico, entre los niveles primario y secundario. Mientras tanto, el docente universitario debe enfrentar una realidad de grandes desniveles cognitivos, por falta de calidad y cantidad de contenidos, por la utilización de métodos de enseñanza ya superados, reflejados particularmente en la falta de integración de conocimientos, por permisibilidad del ingreso sin especialización, entre otras, por lo que tiene que asumir la tarea de enseñar a pensar, porque el alumnado que recibe no aprendió a pensar.

Al docente no le queda otra alternativa que acudir a los contenidos de "su asignatura" y servirse de ella como instrumento pedagógico para iniciar o perfeccionar un proceso de pensamiento lógico, para lo cual deberá estar preparado en docencia superior y hacer acopio del "proceso de aprendizaje empírico" sobre estrategias metodológicas que ha ido desarrollando en el campo de la experimentación, a lo largo de su más o menos prolongada carrera docente.

El autor considera la experiencia docente como muy valiosa a la hora de la transmisión de conocimientos. En ella se refleja la carga de horas de preparación de los temas que debe desarrollar clase a clase, el ordenamiento de los mismos, la forma como debe exponerlos para facilitar su comprensión, la selección de tareas individuales o grupales para consolidar el conocimiento, en fin, la gestión en aula bajo supervisión. A partir de toda esa experiencia es posible plantear estrategias metodológicas para el desarrollo del pensamiento y, en nuestro caso, del pensamiento matemático. El autor cree firmemente que el docente universitario responsable y consciente del valor agregado que tiene su actividad educativa en la formación del futuro profesional, está en capacidad de proponer estrategias metodológicas que potencien el desarrollo del pensamiento, más aún, si ese conocimiento empírico producto de la experiencia, lo respalda y perfecciona con cursos de cuarto nivel que le impriman el aval de conocimiento científico.

Para plantear estrategias metodológicas que motiven el desarrollo del pensamiento matemático y, además contribuyan a la comprensión de la asignatura respectiva, debemos conocer su contenido, sus objetivos y su relación vinculante en el mapa curricular de la formación académica.

En primer lugar, recordemos que el perfil profesional para el ejercicio de la arquitectura, se estructura sobre un conjunto de atributos que le permiten actividades de: diseño, construcción, administración, fiscalización, consultoría, supervisión, empresariales, técnicas, artísticas, entre las más comunes y quizás, más importantes, para lo cual requiere de una formación científica, técnica, artística y humanística. (Asamblea Nacional del Ecuador, 1992-1993)

En segundo lugar, por lo tanto, el conjunto de asignaturas que integran el mapa curricular, deberá contener aquellos aspectos del conocimiento que producirán un profesional competente para resolver el problema de diseño y construcción de espacios, donde desarrollar aquellas actividades que satisfagan las diversas necesidades humanas de vivienda, salud, educación, trabajo, recreación, entre otras. Al propio tiempo, es preciso que incluya aquella complejidad social que se engendra en la relación biunívoca actividad-necesidad -y sepa organizarla armónicamente-, para que florezcan los conjuntos habitacionales, urbanizaciones y ciudades, sin conflictos con el equipamiento correspondiente a su población y ubicación territorial.

En la línea de lo científico-técnico, donde se aplican conocimientos matemáticos simples o complejos, se hallan las asignaturas: Diseño Urbano, Administración de obras, Presupuestos, Construcción, Instalaciones, Estructuras y Topografía. Todas esas materias, junto a las teóricas de carácter conceptual y las instrumentales de expresión técnica y artística, convergen hacia una "columna vertebral" en la formación del arquitecto cual es Diseño Arquitectónico. En ellas se ponen en práctica los conocimientos mediante una estrategia conocida como Taller de Proyectos, la cual viene a ser como una fragua de creatividad y talento, donde se cultiva y desarrolla el análisis y la síntesis, la imaginación y la reflexión, la ingeniosidad y la creatividad, los más insignes atributos a manifestar en la práctica profesional.

Es apropiado hablar de la Matemática en Arquitectura, tanto en objetivos como en contenidos, manteniendo en primerísima línea el objetivo superior de enseñar a pensar potenciando el razonamiento lógico. Es importante indicar que la Matemática debe cumplir su rol tributario en cuanto a requisitos cognitivos para la medición de terrenos -ángulos, perímetro, área- el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos de -forma regular, geométricos, o de forma irregular-; centros de equilibrio o el requisito para la denominada "Geometría del Diseño Arquitectónico".

Consecuentemente, los contenidos serán de carácter algebraico en la resolución de fracciones y ecuaciones; de naturaleza geométrica en lo concerniente a superficies y volúmenes; con aspectos de orden trigonométrico en lo relacionado a funciones y resolución de triángulos y, de geometría analítica para manejar ecuaciones de rectas y curvas en el plano de coordenadas.

La parte medular del sistema enseñanza-aprendizaje de la matemática en Arquitectura está centrada en la búsqueda de una forma de enseñar a pensar con los contenidos necesarios que su rol tributario impone. A tenor de ello, se deberán seleccionar estrategias metodológicas que tengan la virtud de potenciar el razonamiento lógico y lograr la comprensión de la materia para efectos de su dominio y aplicabilidad posterior.

Con el conocimiento empírico adquirido por la experiencia de muchos años de docencia y el pulimento de cursos de cuarto nivel en Educación Superior, elevando dicho conocimiento a la categoría de científico, el autor considera muy favorable y efectivo para el sistema enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Arquitectura, las siguientes estrategias metodológicas:

1.- **Estrategia del Descubrimiento (E.D.):** significa llegar a conocer lo desconocido, alcanzar un conocimiento mediante la búsqueda. Ello, en el mundo de la matemática es posible mediante el uso del método exploratorio, el cual encamina hacia la solución de un problema con el recurso de las probabilidades encauzadas en deducciones o conclusiones lógicas.

La exposición de un tema por parte del profesor o la exposición de los resultados de una investigación dirigida, es un buen mecanismo que permite hacer descubrimientos a partir de la demostración y el debate del tema.

La denominada Metodología del Descubrimiento es un magnífico recurso pues, a la vez que motiva el aprendizaje, incentiva el desarrollo del pensamiento.

2.- **Aprendizaje Basado en Problemas (A.B.P.):** es una estrategia metodológica que permite el aprendizaje de los contenidos necesarios para la resolución de problemas. Debe aplicarse con mucha cautela, con énfasis en la secuencia cognitiva de la cadena de conocimientos propia del aprendizaje de la matemática. El objetivo de la aplicación de esta estrategia metodológica es mejorar la comprensión de la materia.

3.- **Estrategia de la Integración cognitiva (E.I.C.):** Es una estrategia metodológica que pone de relieve la importancia de la integración de conocimientos y en la consideración que la matemática del primer ciclo de estudios de la carrera de Arquitectura, incluye temas de Algebra, Trigonometría, Geometría General y Geometría Analítica, planteados en ese orden y distribuidos en cuatro unidades en el sílabo correspondiente es, para mi criterio, una formalidad, porque aplicar la rigidez de ese orden establecido nos llevaría a proporcionar y obtener conocimientos aislados y fraccionados. Se debe compartir temas de los diversos segmentos, donde el estudiante pueda apreciar la integración de los conocimientos y valorarlos por la aplicabilidad de los mismos. Con la utilización de dicha estrategia metodológica, se trata de conseguir mayor capacidad integradora además de potenciar el razonamiento lógico.

4.- **El Taller de Práctica (T.P.):** se trata de una estrategia metodológica muy común, utilizada en la mayoría de las materias de la facultad de Arquitectura. Tiene su raíz en un principio universal muy antiguo: aprender haciendo. La estrategia TP es muy conveniente a la hora de la consolidación de los conocimientos y el desarrollo del proceso interactivo alumno-alumno y profesor-alumno.

TESIS DE POST-GRADO: DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y PROCESOS LÓGICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMA´TICA. 2012.- ARQ. JULIO ROMO-LEROUX

Vale aclarar dichas estrategias con algunos ejemplos de clase:
Unidad: Geometría General. - Sub-unidad: Geometría Plana .
Capítulo: Las figuras geométricas. - Tema: Los triángulos. - Sub-tema: Clasificación

Con el auxilio de la Mayéutica Socrática se recordarán los aspectos conceptuales y los principios, características y propiedades de los triángulos:

- Figura geométrica compuesta de tres segmentos rectilíneos y tres ángulos.
- La suma de sus ángulos interiores es 180°.
- La suma de dos de sus lados es mayor que el tercer lado.
- A mayor lado se opone mayor ángulo; a menor lado se opone menor ángulo.
- A lados iguales se oponen lados iguales.
- Los triángulos se clasifican por sus lados y por sus ángulos.

Con los factores cognitivos supuestamente enseñados y aprendidos en el bachillerato, puede avanzarse hacia el DESCUBRIMIENTO de una clasificación "integrada" de las figuras geométricas de estudio:

CUADRO DE LA CLASIFICACIÓN INTEGRADA

	ACUTÁNGULO	RECTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
EQUILÁTERO	SI	NO	NO
ISÓSCELES			
ESCALENO			

Se trata de llenar el cuadro reflexionando sobre las características y propiedades de los triángulos, sacando conclusiones = descubriendo que: el triángulo equilátero, al tener tres lados iguales y, en consecuencia, tres ángulos iguales y, como la suma de los mismos siempre será 180°, entonces, sus ángulos medirán 60° cada uno y, por lo tanto, sólo podrá ser triángulo acutángulo. Del mismo modo se procederá con los otros dos casos.

Con el conocimiento adquirido mediante la estrategia E. D., se podría pasar a la formulación del siguiente problema:

Los lados de un triángulo miden 7, 10 y 13 metros respectivamente, averiguar si se trata de un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

Primera conclusión: siendo los lados de diferente tamaño, se trata de un triángulo escaleno.

Segunda conclusión: al tener sus lados distintos, sus ángulos serán de diferente amplitud.

Tercera conclusión: el mayor ángulo es el que está opuesto al lado mayor (13m)

Con la premisa del conocimiento de lo que significa acutángulo, rectángulo y obtusángulo, se abrirá el debate sobre la forma de reconocerlo según sus ángulos, de tal manera que el alumnado plantee procesos que lleguen a identificar al triángulo por sus ángulos; de lo planteamientos podría surgir la idea de la identificación por eliminación, verificando – por la ley pitagórica – si se trata de un triángulo rectángulo, donde, el lado mayor sería la hipotenusa y los lados menores los catetos:

$$7^2 + 102 < 132 \longrightarrow 49 + 100 < 169$$

Esta operación significa que el proponente tiene conocimiento de la Ley, pero, antes de continuar con el proceso de identificación, se deberá consultar al resto de estudiantes sobre dicho conocimiento; en caso contrario, se deberá incursionar en la estrategia A.B.P. por la cual se producirá el aprendizaje de la ley pitagórica con el recurso del problema planteado.

El resultado de la operación numérica nos demuestra que NO se trata de un triángulo rectángulo, pero aprovechando de ese resultado, queda el camino abierto a la exploración:

$$7^2 + 10^2 > 11^2 \longrightarrow 49 + 100 > 121$$

$$7^2 + 10^2 > 12^2 \longrightarrow 49 + 100 > 144$$

$$\text{Pero: } 7^2 + 10^2 < 13^2 \longrightarrow 49 + 100 < 169$$

Al observar los resultados nos damos cuenta que, en los dos primeros casos se obtiene un "mayor que" (>), pero en la propuesta del problema se obtiene un "menor que" (<), lo cual significa que, entre el segundo y tercer caso habrá un "igual que", el mismo que será el sitio del triángulo rectángulo.

Conclusión: a medida que el lado mayor se hace más pequeño se tendrá un "mayor que", pero, a medida que el lado mayor se hace más grande se tendrá un "menor que" y, mientras más grande sea el lado mayor, el ángulo opuesto tendrá mayor amplitud; por lo tanto, si la suma de los cuadrados de los lados menores es mayor que el cuadrado del lado mayor, se tratará de un triángulo acutángulo (deducción lógica), en caso contrario, se tratará de un triángulo obtusángulo (deducción lógica).

La explicación del problema planteado, abre la posibilidad de utilizar la estrategia de la integración de conocimientos (E.I.C.), ante la probabilidad de participación de algún estudiante -con mayores conocimientos previos-, que plantee la utilización de la Ley del Coseno, cuya aplicación permite conocer los ángulos de un triángulo dados sus tres lados.
Dada la gran heterogeneidad cognitiva, el docente deberá "aplazar" la demostración de dicha Ley y, sólo le será posible exponer, por escrito, las fórmulas respectivas, a partir de lo cual, si es factible realizar -con el recurso exploratorio trigonométrico-, la averiguación solicitada en el problema.

Finalmente, y para complementar el aprendizaje del subtema tratado, será muy conveniente hacer aplicaciones sobre situaciones similares, con datos dimensionales como los siguientes: 8; 8; 10 metros, 8; 8; 11 metros, 8; 8; 12 metros, utilizando la estrategia T. P. manejada grupalmente, para cultivar y fortalecer la relación profesor-alumno y alumno-alumno, mediante el intercambio de ideas y la argumentación y, con la guia del profesor, descubrir el caso especial del triángulo rectángulo isósceles, clasificado como triángulo notable por la relación dimensional entre sus tres lados y de la altura sobre la hipotenusa, cuya aplicación facilita la resolución de muchos problemas geométricos.

Teniendo presente que las estrategias metodológicas han sido concebidas para facilitar la comprensión de la materia y potenciar el razonamiento lógico, es necesario complementarlas con una guía metodológica que se encargue de "ordenar" el pensamiento para que transite por el camino del análisis, mediante la observación, la reflexión, la exploración, la graficación (si es del caso) y llegar a deducciones y conclusiones lógicas, para entrar a un proceso de síntesis mediante la transformación, la propuesta, la resolución y la demostración. (Romo-Leroux, 2012)

Su nombre proviene de la denominación con la cual se ha identificado cada uno de los cinco pasos que comprenden la guía metodológica:

a) **Valoración de términos y frases:**
Es muy importante leer con mucha atención el enunciado del problema por el significado y las im-

plicaciones que pudieren tener algunos términos y frases, que suelen ser claves para la elección del camino que se debe recorrer para llegar a la solución del problema que se plantea en la redacción del mismo y, que generalmente, está contenido en la pregunta que se formula. En muchos casos nos encontraremos con expresiones susceptibles de interpretación, lo que hace que la toma de decisión entre en el ámbito de las probabilidades.

En este punto inicial del método propuesto, la reflexión como actividad intelectual de meditación, será de gran ayuda en la selección de la "puerta de ingreso" hacia el camino del desarrollo y solución del problema. Dicha reflexión facilita la puesta en marcha de una segunda manifestación de la primera parte del proceso de pensamiento la cual es la deducción; por medio de ella se logra sacar conclusiones a partir de proposiciones o principios generales o de algo conocido o asumido (deducción lógica).

El acto de reflexión lleva frecuentemente a la graficación de la idea o condiciones que se plantean, lo cual favorece la presencia de la observación, acto mediante el cual examinamos atentamente la situación; observar va mucho más allá que mirar, e inclusive es más que ver. Muchos sostienen que es el paso inicial de cualquier proceso mental y, precisamente, la posibilidad de la graficación contribuye mucho en la deducción.

b) **Deducir o descubrir mensajes:**
En este punto del proceso de pensamiento, que tiene un sentido exploratorio, es posible que una palabra, una frase valorada o los datos proporcionados nos envíen mensajes de inclusión o exclusión de opciones que permitan identificar una incógnita, establecer alguna relación de dependencia entre los "actores del problema". Este paso del proceso es fundamental porque brinda la oportunidad de establecer las herramientas disponibles para la ejecución del problema.

Hasta este momento nos encontramos en la etapa de análisis, mediante la cual hemos "desmenuzado" el problema reflexionando, observando y explorando para obtener conclusiones lógicas que faciliten el tratamiento del mismo.

c) **Ponderación de la información:**
En este punto se trata de establecer lo que quiere decir o lo que significa la información general del problema o alguna en particular; se busca obtener un "valor agregado", una representatividad informativa tal, que sea de utilidad práctica y oriente el camino a la solución del mismo. Es el inicio del proceso de síntesis dentro del desarrollo del pensamiento matemático.

d) **Síntesis y transformación de la información:**
La información se la puede transformar en un gráfico ilustrativo de lo que se plantea en el problema, el mismo que puede ser tan sólo una aproximación gráfica, ya que lo más importante será la correspondencia con las conclusiones a las que se han llegado con la valoración, la deducción y la ponderación de frases, mensajes e información explícita que contenga el enunciado, proceso con el cual se realiza una síntesis de todo lo observado, reflexionado y explorado. Se trata de un elemento de apoyo y constituye la herramienta fundamental con la que un alumno expresará sus ideas de organización espacial, tanto en sentido bidimensional como tridimensionalmente a lo largo de su carrera formativa. Con cierta frecuencia se dan problemas que no requieren de todos los pasos del proceso, ya que su literatura es directa y, por lo tanto, es posible realizar un acercamiento gráfico según la pregunta y los datos que se proporcionan en el enunciado, examinar atentamente la situación (observar) y hacer el o los planteamientos de solución y seleccionar el más adecuado, simple y directo que nos lleven a la respuesta.

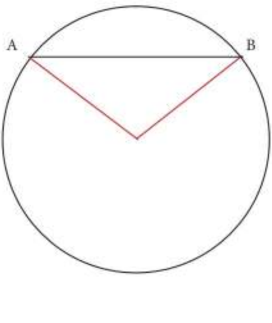
e) **Planteamiento de solución:**
Es la propuesta que guía un proceso de resolución, mediante el cual se enuncia lo que podría considerarse una tesis: "yo sostengo que". Se trata de una aseveración por la cual se llega a visualizar "el problema dentro del problema" y, por lo tanto, orienta el camino de desarrollo del mismo, lo cual viene a ser una forma de "sustentación".

El planteamiento de solución no es otra cosa que expresar o indicar el procedimiento que sirve para contestar la pregunta formulada en la redacción del problema pero, con cierta frecuencia, se podrían dar alternativas de solución o su literatura tiene más de una pregunta que contestar, entonces, por un lado, los diversos planteamientos deberán contrastarse en cuanto a la factibilidad y grado de complejidad de su aplicación, al requisito y asistencia de fórmulas directas o derivadas, a los datos que se proporcionen en la redacción y la necesidad de calcular datos auxiliares.

Además, habría que averiguar si con un solo planteamiento, es posible contestar todas las preguntas formuladas, ya que, de lo contrario, cada pregunta tendría un planteamiento de solución.

La resolución es el último momento del proceso de pensamiento matemático mediante el cual, se pone en ejecución lo planteado y es el conjunto de operaciones matemáticas que se tengan que realizar, manejando las herramientas más adecuadas (fórmulas) y principios, propiedades, características, conceptos, etc., en concordancia con el camino seleccionado (planteamiento de solución). La resolución lleva implícitamente la necesidad de La demostración de que la respuesta obtenida es correcta ya que es algo así como la reafirmación de lo sostenido y sustentado.

ALGUNOS EJEMPLOS DEL PROCESO. –
PROBLEMA: Una cuerda divide a una circunferencia en dos secciones tales que, la relación dimensional entre los dos arcos resultantes es 1 a 2. Establecer la relación métrica entre los dos segmentos circulares producidos por el trazado de la cuerda.



a) Valoración de términos y frases:

Relación dimensional y relación métrica significa la comparación entre dos magnitudes lineales o de superficie.

b) Deducir o descubrir mensajes:
La relación 1 a 2 significa que el arco menor $\overset{\frown}{A\text{-}B}$ es la mitad del arco mayor $\underset{\smile}{A\text{-}B}$

c) Ponderar la información:
Si el arco menor es la mitad del arco mayor, quiere decir que el arco menor es la tercera parte de la circunferencia.

Dado que el arco menor es la tercera parte de la circunferencia, el ángulo central correspondiente a dicho arco, será la tercera parte de 360°, es decir 120°

En el enunciado del problema no se especifica si la relación entre los dos segmentos circulares es de mayor a menor o viceversa, por lo tanto, la respuesta será válida en cualquiera de las dos formas.

d) Sintetizar y transformar la información:
El arco menor será igual a $2x\ \pi \times R/3$ y el arco mayor $4 \times \pi \times R/3$

El triángulo formado por los dos radios y la cuerda, contiene los elementos dimensionales necesarios y suficientes para calcular su área.

e) Planteamiento de solución:

Si al área del círculo se le resta el segmento circular menor se obtendrá el segmento mayor y con ello se podrá establecer la relación métrica solicitada.

Proceso operativo:

Segmento menor:
$\pi \times R^2 x120°/360° - R^2 \times \text{Sen } 120°/2 = R^2\,(4\pi - 3\sqrt{3})/12$

Segmento mayor:
$\pi \times R2 - R2\,(4\pi - 3\sqrt{3})\quad 12 = R2\,(8\pi + 3\sqrt{3})\quad 12$

$$\text{Relación métrica} \begin{pmatrix} \text{SEGM. MAYOR } R2\,(8\pi + 3\sqrt{3})\,12 \\ \text{SEGM. MENOR } R2\,(4\pi - 3\sqrt{3})\,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\pi + 3\sqrt{3} \\ 4\pi - 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

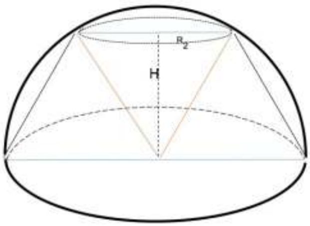
PROBLEMA: Establecer la relación métrica existente entre un cono truncado inscrito en una semi-esfera, si la base mayor del primer cuerpo coincide con el plano circular del segundo y, la relación dimensional entre los radios de los dos planos circulares del cono truncado es de 1 a 2.

a) Valorar términos y frases:
Relación métrica: es la comparación entre el tamaño de ambos volúmenes.
La base mayor del primer cuerpo coincide con el plano circular del segundo:
Se trata de que ambos planos son de igual superficie, lo que significa igualdad entre sus dos radios.

b) Deducir o descubrir mensajes: El radio de la esfera es el elemento integrador.

c) Ponderación de la información: Si la relación entre los radios del cono truncado es 1 a 2, significa que, el diámetro del círculo menor es igual al radio de la base de la semi-esfera.

La condición de volumen inscrito en la semi-esfera que tiene el cono truncado, permite visualizar la formación de un triángulo equilátero, al trazar dos radios desde el centro del plano circular, hasta los puntos de contacto de los lados inclinados del cono truncado con la semi-esfera y que junto con el diámetro del círculo menor, forman el triángulo antes mencionado.



d) Síntesis y transformación de la información:
El problema gira en torno del triángulo equilátero que se ha formado, ya que todos los elementos dimensionales de ambos cuerpos geométricos se encuentran reunidos en dicha figura.

e) Planteamiento de solución:
Como el volumen de la semi-esfera se encuentra en función de su única variable que es el radio, la solución del problema será posible si se logra transformar la fórmula del volumen del cono truncado- que contiene las variables radio y altura- a la variable radio de la semi-esfera.

A transformación es posible utilizando la relación dimensional entre el lado y la altura del triángulo equilátero: $h = \ell x\sqrt{3} / 2$; en este caso, el lado del triángulo es igual al radio de la semi-esfera.

Ahora bien, se tiene que $R_2 = R_1 / 2$ pero $R_1 = R$ (radio de la semi-esfera).
La fórmula del cono truncado es:
$\pi \text{ x } H\,(R_1^{\,2} + R_2^{\,2} + R_1 \text{ x } R_2) / 3$ de donde si:
$H = R\sqrt{3} / 2$ entonces: $V_{CT} = \pi \text{ x } R\sqrt{3} / 2\,(R^2 + R^2/4 + R^2 / 2) / 3$ es decir que:
$V_{CT} = 7\pi R^3 \sqrt{3}/24$ y $V_{SE} = 2\pi R^3/3$ entonces, la relación métrica entre ambos volúmenes será:
$16\sqrt{3} / 21$ resultado que expresa cuanto mayor es la semi-esfera respecto del cono truncado inscrito.

Referencias bibliográficas

Asamblea Nacional del Ecuador. (1992-1993). Ley de ejercicio profesional de la Arquitectura. Quito.
Romo-Leroux, J. (2012). Desarrollo del pensamiento y procesos lógicos en el aprendizaje de la Matemática. Guayaquil.