Influencia de la comprensión conceptual en la resolución de problemas sobre integrales definidas

Influence of conceptual understanding in the problem solving about definite integrals

Autores:

Christian Pavón Brito
christian.pavonb@ug.edu.ec
Universidad de Guayaquil

Jorge Flores Herrera
jfloresh@ulvr.edu.ec
Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil

Fecha Recepción: Abril 27 de 2016 **Fecha Aceptación:** Septiembre 13 de 2016

RESUMEN

El propósito de este estudio fue aplicar los procesos de comprensión conceptual en la resolución de problemas al concepto de integral definida para mejorar el rendimiento de los estudiantes. Los sujetos fueron 30 estudiantes registrados en un curso de Análisis Matemático para la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Educación con mención en Física-Matemática. La edad de ellos está comprendida entre los 20 y 23 años de edad, entre los cuales se cuentan 22 hombres y 8 mujeres. El procedimiento seguido durante la intervención fue el siguiente: (1) Presentar la intervención al grupo experimental y al grupo de control el modelo tradicional (2) Administrar la prueba de desempeño. La prueba t de Student -Welch dio un valor de $p = 0.0068$ por lo tanto se acepta la hipótesis de investigación y se puede inferir que los resultados obtenidos se deben a la aplicación de las representaciones múltiples.

Palabras claves: Comprensión conceptual, Resolución de problemas, Representaciones múltiples, Enseñanza de Matemáticas.

ABSTRACT

The purpose of this study was to apply the processes of conceptual understanding in solving problems to the concept of definite integral to improve student performance. The subjects were 30 students enrolled in a course of Mathematical Analysis for the Bachelor of Science in Education with a major in Physics-Mathematics. Their age is between 20 and 23 years old, of which 22 are men and 8 are women. The procedure followed during the intervention was as follows: (1) Present the intervention to the experimental group and to the control group the traditional model (2) Apply the performance test. Student-Welch's t-test gave a value of $p = 0.0068$; therefore the research hypothesis is accepted and can be inferred that the results are due to the application of multiple representations.

Keywords: Conceptual Understanding, Problem Solving, Multiple Representations, Mathematics Teaching.

La enseñanza del Calculo Integral por parte de algunos profesores es altamente procedimental (Engelbrecht, Hardin & Potgieter, 2005; Einsenhart, Borko, Underhill, Brown, Jones & Agard, 1993). En tales casos, dichos profesores enfatizan más en el procedimiento para resolver un determinado problema que en la parte conceptual. Como consecuencia, los estudiantes, cuando resuelven problemas de cálculo integral, no necesariamente mejoran la comprensión de los conceptos subyacentes: simplemente memorizan el procedimiento para resolver los mismos.

Es fundamental el reconocimiento por los profesores de que el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental están relacionados (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). De igual forma, que mediante las representaciones externas múltiples es posible tender un puente entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, para mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje. Los estudiantes necesitan de los dos tipos de conocimientos para responder a las preguntas sobre matemática que involucran ambos tipos de conocimiento (Hiebert & Wearne, 1986).

El propósito de este estudio fue aplicar los procesos de comprensión conceptual y de resolución de problemas al concepto de integral definida, para mejorar el rendimiento de los estudiantes, utilizando las representaciones externas múltiples.

Conocimiento conceptual y procedimental

El conocimiento conceptual “puede definirse como el conocimiento de los conceptos de un dominio y sus interrelaciones. (Schneider, Rittle-Johnson & Star, 2011, pág. 1525). Así, en el caso de la integral definida, el conocimiento conceptual incluye el significado de la integral definida, como el área bajo la curva entre los límites superior e inferior.

El conocimiento procedimental “puede definirse como la habilidad para ejecutar una secuencia de acciones para resolver un problema.” (Schneider, Rittle-Johnson & Star, 2011, pág. 1525). Por ejemplo, en el caso de la integral definida, el conocimiento procedimental indica los pasos a dar para aplicar el algoritmo que le permitirá encontrar la integral de una función entre los límites superior e inferior. El conocimiento procedimental solo puede aprenderse haciendo, no se puede aprender escuchando o viendo (Anderson & Lebiere, 1998).

Una investigación realizada por Byrnes y Wasik, encontró que el conocimiento conceptual es importante para lograr el conocimiento procedimental (Byrnes & Wasik, 1991). Otra investigación, esta realizada por Kerslake, encontró que los estudiantes resuelven los problemas siguiendo el procedimiento sin tener un conocimiento conceptual adecuado (Kerslake, 1986). El problema derivado de tal situación es el aumento del número de errores cometidos por los estudiantes, al no tener una base conceptual adecuada. Una respuesta para estos estudios discrepantes son las diferencias individuales existentes entre los estudiantes (Hallett, Nunes, & Bryant, 2010).

Representaciones externas múltiples

Las representaciones externas múltiples representan "la capacidad del discurso de la ciencia para representar el mismo concepto o procesos de diferentes modos" (Praire, Tytler & Peterson, 2009). Las representaciones múltiples externas generan una comprensión conceptual más profunda, lo cual es el propósito de este trabajo (Ainsworth. 1999; Ainsworth, 2006)

Las representaciones externas múltiples se clasifican en representación verbal, representación pictórica, representación matemática, representación gráfica y representación simbólica. La representación pictórica ayuda a la comprensión de la representación verbal que involucra el concepto (Van Meter, Aleksic & Garner, 2000). En lo que se refiere al orden de presentación, un grupo de estudios consideran que se mejora la comprensión conceptual cuando la representación verbal va primero que la representación pictórica. En tanto otros estudios indican lo contrario.

Modelo de la intervención

El modelo de la intervención consta de las siguientes fases: la preinstruccional, la instruccional y la de evaluación.

La fase preinstruccional comprende la presentación de los objetivos instruccionales a los estudiantes. Mientras, la instruccional abarca la presentación del contenido de la clase. Esta actividad comprende la presentación de la representación pictórica del concepto y la activación del conocimiento previo, la presentación de la representación verbal y finalmente la presentación de la representación matemática, mediante la demostración de la expresión matemática del concepto bajo estudio y la aplicación del concepto en la resolución de problemas, utilizando diferentes contextos, promoviendo la transferencia del concepto a otros contextos. Por último, la fase de evaluación comprende las evaluaciones: formativa del aprendizaje y sumativa del aprendizaje de los estudiantes.

Este modelo de intervención está fundamentado en cómo las personas aprenden: (1) Los estudiantes aprenden relacionando la información nueva con los conocimientos previos que ellos tienen. (2) Los estudiantes están motivados para aprender cuando ellos establecen sus metas instruccionales y tienen el control de su propio aprendizaje. (3) Los estudiantes necesitan aprender los conceptos centrales de la disciplina para aprender a razonar y resolver problemas. (4) Los estudiantes están motivados para aprender cuándo pueden reflexionar sobre su progreso (National Research Council, 2000).

Hipótesis

La hipótesis de investigación es: Los estudiantes a quienes se aplica la intervención tienen mejor desempeño que aquellos estudiantes a los cuales no se les aplica la intervención.

La hipótesis nula es: Aquellos estudiantes a los cuales se aplica la intervención tienen el mismo desempeño de aquellos estudiantes a los cuales no se aplica la intervención.

Importancia del estudio

Es estudio es útil, tanto por razones teóricas como prácticas, investigar cómo la comprensión conceptual mejora el rendimiento de los estudiantes. Por el lado teórico, este estudio provee evidencia experimental directa de cómo aprenden los estudiantes. Por el lado práctico aplicar las representaciones múltiples en la comprensión conceptual para mejorar el aprendizaje del Cálculo Integral ayuda a los estudiantes a resolver los problemas.

Los problemas de cálculo integral requieren que los estudiantes hagan uso de habilidades espaciales para resolver los mismos. La habilidad de construir e interpretar gráficos es una habilidad básica del científico, dado que estos se requieren para mostrar los resultados de la experimentación (Beichner, 1994).

II. MÉTODO

Sujetos

Los sujetos fueron 30 estudiantes, entre los cuales se cuentan 22 hombres y 8 mujeres, todos registrados en un curso de Análisis Matemático para la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Educación, con mención en Física-Matemática. Su edad se halla comprendida entre los 20 y los 23 años de edad.

Tareas y materiales instruccionales

La tarea instruccional corresponde a la unidad "La Integral Definida"; los temas tratados fueron los conceptos de límites de integración, área bajo la curva y suma infinita de Riemann. En el Anexo A se muestra el contenido de La Integral Definida.

Instrumentos

El instrumento para medir el desempeño de los estudiantes fue una prueba de desarrollo con cinco preguntas.

Procedimiento

El procedimiento seguido durante la intervención fue el siguiente: (1) Presentar al grupo experimental la intervención y al grupo de control impartir la clase de acuerdo al modelo tradicional. El contenido y los problemas propuestos fueron los mismos para ambos grupos, lo único que varió fue la manera de presentarlos. (2) Administrar la prueba de conocimientos tanto al grupo experimental como de control. La prueba de conocimientos fue idéntica para ambos grupos.

Análisis de datos

El análisis estadístico aplicado en esta investigación fue la prueba t de Student-Welch, con un nivel de significación $p < 0,05$.

III. RESULTADOS

Hipótesis

En la Figura 1 se muestran los resultados de la prueba de desempeño administrada al grupo experimental y de control.

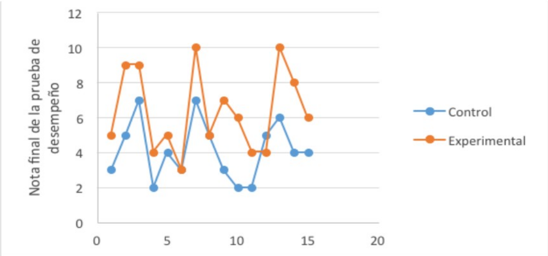


Figura 1. Resultados individuales de la prueba de desempeño

La prueba t de Student - Welch dio un valor de $p = 0.0068$ por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis de investigación.

A continuación, en la Tabla 1, se resumen los resultados de la prueba t.

Grupo	Número de estudiantes	Media	Desviación estándar	t	df	p
Experimental	15	6,33	2,35	2,95	25,38	0,0068
Control	15	4,13	1,68			

Tabla 1. Datos estadísticos de la prueba de desempeño

IV. DISCUSIÓN

La enseñanza de la integral definida mediante las representaciones externas múltiples es fundamental en el proceso de aprendizaje porque los estudiantes logran al mismo tiempo el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. Este estudio provee de una evidencia empírica directa que en el aprendizaje de matemáticas es importante utilizar las representaciones múltiples externas.

El estudio probó la hipótesis de que los estudiantes que reciben la instrucción utilizando las representaciones múltiples tienen mayor rendimiento que quienes no la reciben. Los resultados de este estudio pueden atribuirse a que la enseñanza de las representaciones múltiples promueve la comprensión antes que la memorización (Thomas, 2008).

Los resultados del aprendizaje de este estudio se complementan con los trabajos (Bergey, Cromley & Newcombe, 2015) en la que los estudiantes coordinan textos con gráficos.

En vista de los resultados obtenidos se recomienda aplicar la intervención no solo para este capítulo de Cálculo Integral, sino también en algún otro capítulo o en su defecto, en otras asignaturas tales como Física, Biología, Química o materias a fines.

Finalmente, el estudio puede tener un mayor impacto si se utilizan tecnologías de la información y comunicación tales como animaciones y simulaciones.

ANEXO A

Integral Definida
Representación pictórica
En la Figura 1 se muestran siete rectángulos, todos de un grosor Δx. La suma de todas estas áreas es una aproximación del área bajo la curva f(x).

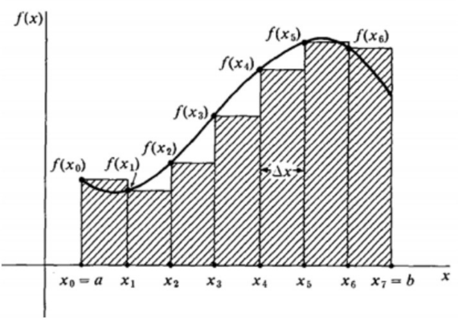


Figura 1. Aproximación del área bajo la curva de una función
Luego, para obtener el área exacta se realizan infinitos rectángulos de un grosor dx, tal como se aprecia en la Figura 2. La suma de todos estos infinitos rectángulos será igual al área bajo la curva, es decir, a la integral definida entre los puntos a y b.

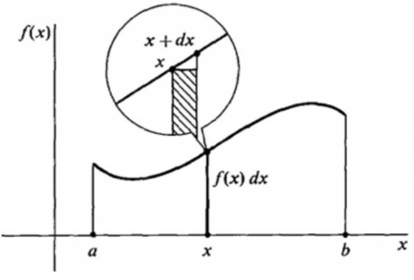


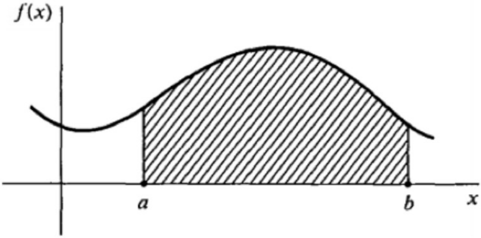
Figura 2. Suma infinita de Riemann

Representación verbal
Una integral es un objeto matemático que puede ser interpretado como un área bajo la curva de una función. La integral, junto con la derivada, son los objetos fundamentales del cálculo. En otras palabras, la integral incluye la antiderivada. La integral de Riemann es la definición más simple de integral y la única que por lo general se aplica en la física y cálculo elemental. Básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños.

Representación matemática
La definición matemática de la integral definida es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = st\left(\sum_a^b f(x)dx\right)$$

La integral definida de f desde a hasta b con respecto a dx se define como una parte estándar de la suma infinita de Riemann con respecto a dx.
Representación gráfica
La integral definida entre los puntos a y b se la interpreta como el área bajo la curva de la función f. Tal como se muestra en la figura 3.



ANEXO B

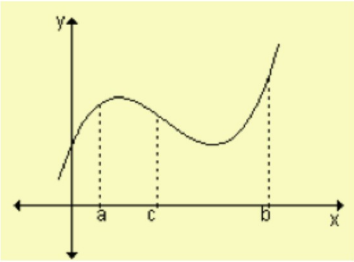
Prueba Integral Definida
Preguntas:

1. Calcule la siguiente integral definida:

$$\int_{-2}^{0} (x-2)(x+1)\,dx$$

2. Encuentre el valor de b tal que $\int_{0}^{b} 6(x-1)(x+1)\,dx = 4$

3. En la función definida gráficamente por:



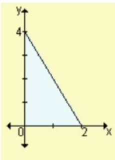
se sabe que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 8$ y $\int_{c}^{b} f(x)\,dx = 6$. Para cada literal halle y realice el gráfico sombreando el área correspondiente:

a) $\int_{b}^{c} f(x)\,dx$

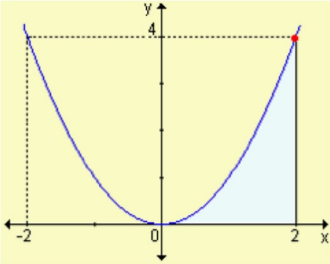
b) $\int_{a}^{c} f(x)\,dx$

4. Escriba para cada caso una integral definida que indique el área de la región sombreada.

a)

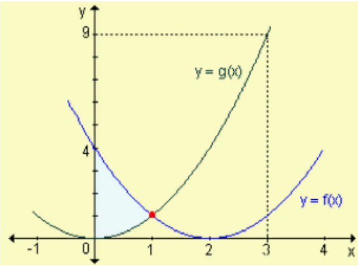


b)



Nota: Asuma que es una parábola.

5. Dada la siguiente gráfica halle el área de la zona sombreada (asuma que son parábolas).



Referencias bibliográficas

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representation. Computers & Education, (33), 131-152.
Ainsworth, S. (2006). DEFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, (16), 183-198
Anderson, J. & Lebiere, C. (1998). The atomic components of thought. Mahwah. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Beichner, R. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. American Journal of Physics. 62(8), 750 - 762.
Bergey, B., Cromley, J., & Newcombe, N. (2015). Teaching high school biology students to coordinate text and diagrams: Relations with transfer, effort, and spatial skills. International Journal of Science Education. 37(15), 2476 - 2502.
Byrnes, J. & Wasik, B. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. Developmental Psychology, 27(5), 777-786.
Einsenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D. & Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. Journal for Research in Mathematics Education, 34(1), 8-40.
Engelbrecht, J., Hardin, A. & Potgieter, M. (2005). Undergraduate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. International Journal of Mathematics Education. 36(7), 701-712.
Hallett, D., Nunes, T. & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. Journal of Educational Psychology, 102(2), 395-406.
Hiebert, J & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts. The acquisitions of decimal number knowledge. En J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. Windsor, England: NFER-Nelson.
National Research Council (2000). How people learn: Brain, mind, experience, and school. Washington DC, USA: National Academy Press.
Praire, V., Tytler, R. & Peterson, S. (2009). Multiple representation in learning about evaporation. International Journal of Science Education, 31(6), 787-808.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. To appear in Kadosh, R. & Dowker, A. (Eds.), Oxford handbook of numerical cognition. Oxford, United Kingdom: Oxford University Press.
Schneider, M., Rittle-Johnson, B. & Star, J. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. Developmental Psychology, 47(6), 1525-1538.
Thomas, M. (2008). Conceptual representations and versatile mathematical thinking. Proceedings of ICMI-10, Copenhague, Dinamarca
Van Meter, P., Aleksic, M. & Garner, J. (2000). Learner-generated drawing as a strategy for learning from content area text. Contemporary Educational Psychology, (31), 142-166.