

MODELO MATEMÁTICO DE UN ARMONÓGRAFO DE DOBLE PÉNDULO

MATHEMATICAL MODEL OF A DOUBLE PENDULUM HARMONOGRAPH

Christian Pavón Brito
cpavonb@ulvr.edu.ec

RESUMEN

El propósito de este trabajo es presentar un modelo matemático para un armonógrafo formado por dos péndulos que oscilan entre sí formando un ángulo recto. El modelo planteado parte de la suposición de que los péndulos realizan un movimiento oscilatorio amortiguado, analizándolos primero por separado para hallar las ecuaciones paramétricas y luego aplicando el principio de superposición para poder graficar el movimiento completo de la pluma en el tiempo. Para poder comprobar el modelo, se construyó un armonógrafo y se realizaron mediciones de la frecuencia angular, las amplitudes y el factor de fricción para graficar mediante un software las soluciones con los parámetros obtenidos de manera experimental. Finalmente se comparará cualitativamente las gráficas obtenidas mediante el software, con las gráficas obtenidas en el armonógrafo construido.

Palabra clave: armonógrafo, movimiento oscilatorio amortiguado, principio de superposición.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to introduce a mathematical model for a harmonograph that consists of two pendulums which oscillate between each other forming a right angle. The proposed model starts off with the supposition that the pendulums make a damped oscillatory motion, being first analyzed separately in order to find the parametric equations and then applying the superposition principle so the complete motion of the pen in time can be graphed. To be able to prove the model, a harmonograph was built and the angular frequency, the amplitudes and the friction factor were measured in order to graph through software the solutions with the obtained parameters in an experimental way. Finally, graphics we got from the software will be qualitatively compared with the graphs we obtained from the built harmonograph.

Keywords: *harmonograph, damped oscillatory motion, principle of superposition.*

INTRODUCCIÓN

Un armonógrafo es un dispositivo que consta de dos o más péndulos acoplados unidos a una pluma, que por lo general oscilan en ángulos rectos entre sí. El movimiento resultante puede producir curvas complicadas que eventualmente terminan en un punto, debido a que el movimiento del péndulo se amortigua por la fricción [1]. En ausencia de fricción (y para pequeños desplazamientos, las ecuaciones generales del movimiento de péndulo nos llevan a las de movimiento armónico simple), las curvas producidas por un armonógrafo serían curvas de Lissajous.

En este trabajo se realiza el modelo matemático de un armonógrafo de dos péndulos. Uno de los péndulos lleva acoplado una pluma y se encarga de moverlo de adelante a atrás. El otro péndulo sirve para desplazar, en este caso de izquierda a derecha, la superficie sobre la que se dibuja; una hoja de papel o una cartulina, por ejemplo. El efecto combinado de los dos péndulos genera un movimiento que dibuja sobre el papel una curva.

Variando la relación de frecuencias y el desfase entre ambos péndulos, la curva en cuestión puede ser completamente diferente: desde algunas tan simples como circunferencias y elipses hasta otras figuras más complejas.

En condiciones ideales, el movimiento oscilatorio se mantendría hasta que alguna fuerza externa detuviese el vaivén de los péndulos. Debido al rozamiento con el aire y con el papel, los péndulos se van frenando poco a poco [2]. Cada nueva trazada de la pluma se encuentra muy próxima a la anterior y el resultado va adquiriendo una apariencia ondulatoria, como una especie de tela de araña, hasta que finalmente la trayectoria de la pluma se reduce a un único punto y se detiene.

1. Fundamentación matemática

1.1 Principio de superposición

Es principio de superposición es una herramienta más matemática que física, pero sirve para resolver de una manera más sencilla algunos problemas físicos, como el que se da en el armonógrafo.

Básicamente dice que para una ecuación diferencial ordinaria, lineal y homogénea [3], si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación, entonces la combina-

ción lineal $c_1 y_1 + c_2 y_2$ también es una solución para cualquiera de los valores de las constantes c_1 y c_2 [4].

Sin embargo, el principio de superposición no es de ninguna manera obvio en cualquier aplicación física y en muchas ocasiones no se cumple dado que las ecuaciones diferenciales no cumplen con la linealidad [5]. Por lo tanto, su aplicabilidad sólo es posible verificarla por medio de la experimentación.

1.2 Análisis matemático del péndulo oscilante

El análisis empieza suponiendo que el armonógrafo construido está formado por dos péndulos que realizan un movimiento armónico amortiguado.

La deducción teórica del modelo matemático para cada péndulo se obtiene de la siguiente manera:

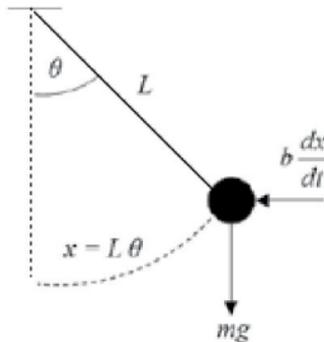


Figura 1.- Esquema del péndulo con amortiguamiento

Del diagrama de fuerzas podemos obtener la fuerza neta horizontal como:

$$F = -mg \operatorname{sen}(\theta) - b \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

Suponiendo que los ángulos de estudio son pequeños podemos decir que $\operatorname{sen}(\theta) = \theta$. Por otro lado, suponemos que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del cuerpo pero directamente opuesta a él.

Aquí b es una constante positiva, que depende de las propiedades de la pluma y del papel más las fricciones propias del mecanismo. Bajo estas consideraciones y aplicando la Segunda Ley de Newton tenemos:

$$-\left(\frac{mg}{L}\right)x - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

Reordenando los términos tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + \left(\frac{mg}{L}\right)x = 0 \quad (3)$$

Una solución de esta ecuación es:

$$x = x_0 e^{-bt/2m} \cos(\omega t + \phi) \quad (4)$$

Donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (5)$$

Como el armonógrafo está compuesto de dos péndulos vamos a tener dos ecuaciones del mismo tipo, que las trabajaremos como paramétricas para poderlas trabajar y graficar más adelante. Usando el principio de superposición, la solución completa que describirá la figura que forma el armonógrafo será la suma de las dos soluciones. Las soluciones quedarían:

$$x = x_0 e^{-bt/2m_1} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (6)$$

$$y = y_0 e^{-bt/2m_2} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (7)$$

Donde:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m_1}\right)^2} \quad (8)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m_2}\right)^2} \quad (9)$$

El factor b no será el mismo para cada péndulo, porque aunque es el mismo papel y la misma pluma la que se usa para los dos péndulos, las fuerzas de fricción internas de los mecanismos de cada péndulo van a variar.

2. Experimentación

2.1 Comprobación de que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad

Si suponemos que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del péndulo $v = dx/dt$, entonces también será proporcional a la velocidad angular $w = d\theta/dt$. Puesto que se sabe que en un movimiento circular se cumple que:

$$\frac{dx}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad (10)$$

Como la energía del sistema se va perdiendo a causa del trabajo de la fuerza resistiva, el tiempo de frenado será proporcional también a la amplitud angular inicial.

Para comprobarlo realizamos mediciones del tiempo de frenado a diferentes ángulos en los dos péndulos y obtuvimos el siguiente resultado

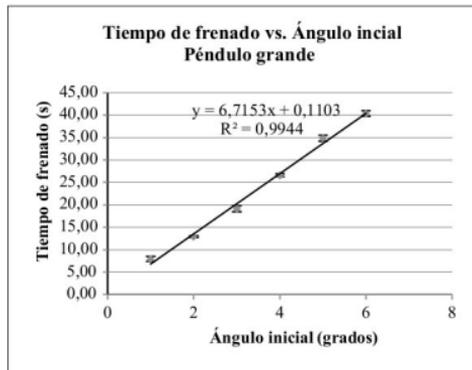


Figura 2.- Tiempo de frenado para el péndulo grande

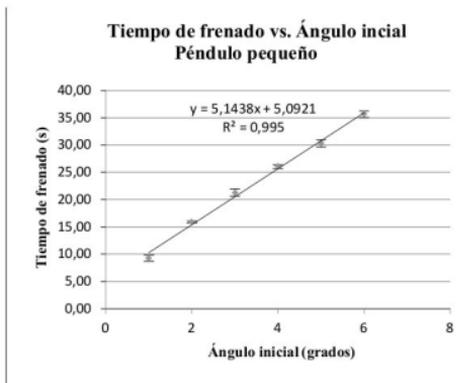


Figura 3.- Tiempo de frenado para el péndulo pequeño

Como vemos el tiempo de frenado es directamente proporcional al ángulo inicial θ . Con esto verificamos que:

$$f = -bv = -b \frac{dx}{dt} \quad (11)$$

2.2 Medición del tiempo de vida media

Para calcular el tiempo de vida media τ , se midió experimentalmente el tiempo en el que la amplitud se reduce a la mitad.

Si en la ecuación (4) decimos que $\tau = 2m/b$, entonces tendríamos:

$$x = x_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (12)$$

Analizando que τ representa el tiempo en el que la amplitud se reduce a la mitad, tendríamos:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-t/\tau} \quad (13)$$

Despejando τ tendríamos:

$$\tau = \frac{t}{\ln(2)} \quad (14)$$

Los resultados obtenidos en los dos péndulos para diferentes ángulos fueron:

Tabla 1: Tiempos de vida media para el péndulo grande

Ángulo	t (s)	τ (s)
20°	8,60	12,41
25°	10,32	14,89
30°	11,77	16,98

Tabla 2: Tiempos de vida media para el péndulo pequeño

Ángulo	t (s)	τ (s)
20°	11,58	16,71
25°	12,96	18,70
30°	14,51	20,93

2.3 Medición de la frecuencia angular y la amplitud

Aunque sabemos que la frecuencia angular en una oscilación amortiguada no es estrictamente periódica [6], podemos hacer la consideración de que en intervalos cortos se puede aproximar.

Por lo tanto medimos el tiempo en que cada péndulo realizó cinco oscilaciones para poder obtener el periodo T dividiendo este tiempo para cinco. Los resultados obtenidos fueron:

Tabla 3: Frecuencia angular para el péndulo grande

T(s)	$\pm \Delta T$ (s)	ω (s ⁻¹)	$\pm \Delta \omega$ (s ⁻¹)
1,49	0,02	4,22	0,28

Tabla 4: Frecuencia angular para el péndulo pequeño

T(s)	$\pm \Delta T$ (s)	ω (s ⁻¹)	$\pm \Delta \omega$ (s ⁻¹)
1,59	0,01	3,96	0,25

Para finalizar con el registro de datos medimos las amplitudes para diferentes ángulos. Los resultados fueron los siguientes:

Tabla 5: Amplitudes para el péndulo grande

Ángulo	A (cm) ± 0,1 cm
20°	4,00
25°	5,00
30°	6,00

Tabla 6: Amplitudes para el péndulo pequeño

Ángulo	A (cm) ± 0,1 cm
20°	3,00
25°	4,00
30°	5,00

3. Resultados

3.1 Ecuaciones paramétricas

El modelo matemático plantea como solución obtener las ecuaciones paramétricas para cada péndulo. Las ecuaciones obtenidas en base a los datos procesados se muestran en las siguientes tablas:

Tabla 7: Ecuaciones para el péndulo grande

Ángulo	Ecuación
20°	$y[cm] = 4e^{-\frac{1}{12,41}} \cos(4,22t)$
25°	$y[cm] = 5e^{-\frac{1}{14,89}} \cos(4,22t)$
30°	$y[cm] = 6e^{-\frac{1}{16,98}} \cos(4,22t)$

Tabla 8: Ecuaciones para el péndulo pequeño

Ángulo	Ecuación
20°	$x[cm] = 3e^{-t/16,71} \cos(3,96t)$
25°	$x[cm] = 4e^{-t/18,70} \cos(3,96t)$
30°	$x[cm] = 5e^{-t/20,93} \cos(3,96t)$

3.2 Gráficas del armonógrafo

Para graficar se utilizó el programa Graph [7], que es un software gratuito.

Las gráficas resultantes para diferentes ángulos fueron las siguientes:

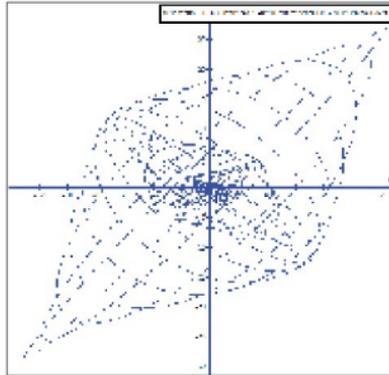


Figura 4.- Gráfica para un ángulo de 20°

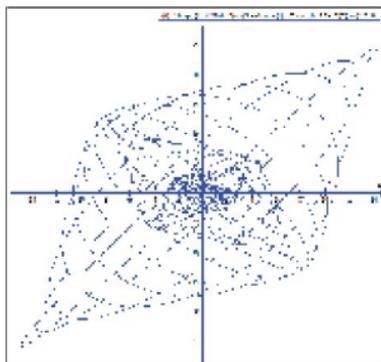


Figura 5.- Gráfica para un ángulo de 25°

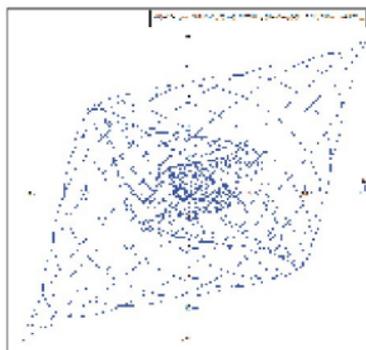


Figura 6.- Gráfica para un ángulo de 30°

A continuación se muestra una foto de la figura que realiza el armonógrafo original con un ángulo de 30° :

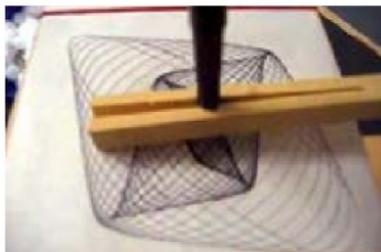


Gráfico 7.- Gráfica realizada por el armonógrafo para un ángulo de 30° en cada péndulo

4. Conclusiones

En base a los resultados podemos aceptar como válida la aplicación del principio de superposición puesto que esta suposición fue comprobada con experimentación.

También podemos observar en la gráfica que variar el ángulo inicial afecta sólo a la amplitud de la figura y no a la forma. La forma es afectada por la frecuencia angular ω .

La mayor limitación de este trabajo está en que no se hizo experimentación con los péndulos desfasados. Se hizo la experimentación siempre con los dos ángulos en fase y con un ángulo de fase $\varphi = 0^\circ$. Realizar la experimentación con distintos ángulos de fase queda para posteriores trabajos acerca del tema.

5. Referencias bibliográficas

- [1] Weisstein E., "Harmonograph". Enlace: <http://mathworld.wolfram.com/Harmonograph.html>
- [2] "La aventura de la ciencia: el armonógrafo". Enlace: <http://laaventuradelaciencia.blogspot.com/2011/09/el-armonografo.html>
- [3] Weisstein E., "Superposition Principle". Enlace: <http://mathworld.wolfram.com/SuperpositionPrinciple.html>.
- [4] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera", 5ª ed., *Limusa - Wiley*, México, 2010).
- [5] Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. S., "Física", Vol. 2, 5ª ed, *CECSA*, México, 2004.
- [6] "Oscilador armónico amortiguado". Enlace: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/oscda.html>.
- [7] "Graph". Este programa se lo puede obtener en su página web oficial: <https://www.padowan.dk/>